Systemtheorie abbildender Systeme

Definitionen **Rauschen**

Eingang $\longrightarrow$ System $\longrightarrow$ Ausgang

- Sei r(x,y) Eingangsbild, dass nur Rauschen (Quantenrauschen) enthält.

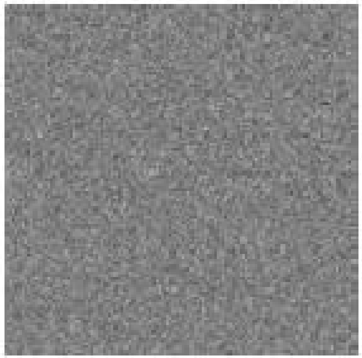
- Das Bild enthalte keinerlei Information, d.h. das **Spektrum ist weiß** und es gibt **keine Korrelationen zwischen den Pixeln**.

- Sei R(u,v) die 2D-Fouriertransformierte von r(x,y) (Rauschamplitudenspektrum).

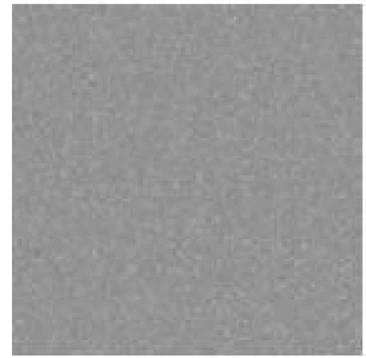
$$r(x,y) \;\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\circ\; R(u,v)$$

$|R(u,v)^2| = NPS_{Eingang}$ = Rauschleistungsspektrum (Noise Power Spectrum)

Definitionen **Rauschen**

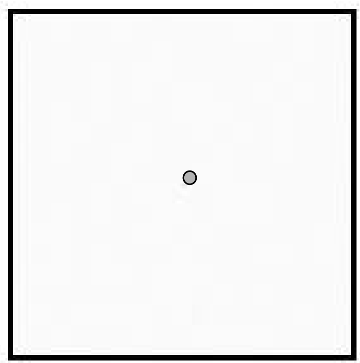


Rauschen (Eingang)



Amplitudenspektrum

Bei weißem Rauschen hat die Autokorrelation nur bei (0,0) einen von 0 verschiedenen Wert.



Autokorrelation

Definitionen Rauschen

- r(x,y) durchlaufe ein abbildendes System
- abbildendes System fügt selber kein Rauschen hinzu, d.h. Rauschen am Ausgang nur durch Quantenrauschen erklärbar !! (d.h. Detective Quantum Efficiency DQE=1)

- für reines Quantenrauschen:

$$\mathrm{DQE} = \frac{\text{mittlere Zahl der nachgewiesenen Röntgenquanten}}{\text{mittlere Zahl der auftreffenden Röntgenquanten}}$$

- Mit Fouriertransformation und komplexer Übertragungsfunktion

Ausgangsbild		Ausgangs-Fouriertransformierte
$r(x,y) * h(x,y)$	$\circ\!\!-\!\!\!-\!\!\circ$	$R(u,v) \cdot H(u,v)$

folgt Rauschleistung am Ausgang („Wiener-Spektrum“):

$$NPS_{Ausgang}(u,v) = W(u,v) = |R(u,v)|^2 \cdot |H(u,v)|^2 = |R(u,v)|^2 \cdot MTF(u,v)^2$$

(DQE = 1!)

Definitionen — Rauschen

- Rauschleistungsspektrum am Ausgang wird auch **Wiener-Spektrum W(u,v)** genannt:

$$\boxed{NPS_{Ausgang}(u,v) = k \cdot MTF(u,v)^2}$$

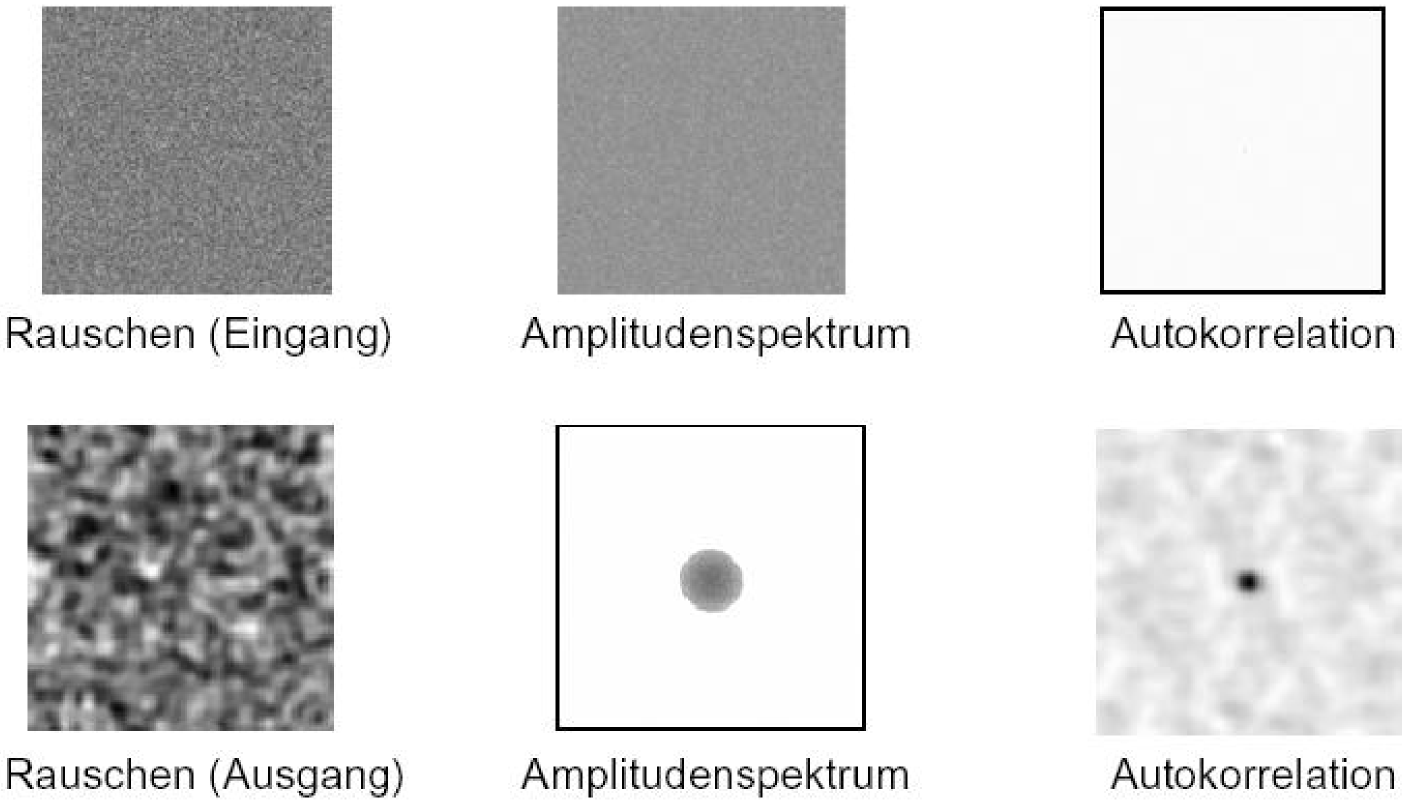
mit k = Proportionalitätsfaktor
abh. u.a. vom Rauschleistungsspektrum am Eingang

- **Rauschleistungsspektrum am Ausgang hat gleichen Verlauf wie quadrierte MTF !!**

- da FT(Autokorrelationsfunktion) = Rauschleistungsspektrum
Þ Autokorrelationsfunktion am Ausgang hat den gleichen Verlauf wie quadrierte MTF !!

Definitionen

Rauschen



Systemtheorie abbildender Systeme

Definitionen **Rauschen**

Eingang → System → Ausgang

- **Hinter einem abbildenden System sind benachbarte Pixel nicht mehr unabhängig voneinander**

- **Aufgrund der endlichen MTF werden hohe Raumfrequenzen abgeschnitten**

- **ein bandbegrenztes Spektrum ist gleichbedeutend mit stärkeren Korrelationen im Bild**

- **ein abbildendes System mit endlicher MTF erzeugt Korrelationen im Bild**

Definitionen **Rauschen**

- bisher: Annahme, dass das System kein Rauschen hinzufügt (DQE = 1)

Definition einer verallgemeinerten DQE(u,v):

bisher:

$$\frac{\dfrac{\text{Signal}^2_{\text{Ausgang}}(u,v)}{\text{Rauschen}^2_{\text{Ausgang}}(u,v)}}{\dfrac{\text{Signal}^2_{\text{Eingang}}(u,v)}{\text{Rauschen}^2_{\text{Eingang}}(u,v).}} = \text{DQE}(u,v)$$

DQE gibt an, um welchen Faktor ein System das Rauschen verschlechtert (Quantenrauschen immer vorhanden !)

Definitionen **Rauschen**

- Ausgangssignal kann mit Übertragungsfunktion H(u,v) aus Eingangssignal berechnet werden:

$$\mathrm{Signal}_{\mathrm{Ausgang}}(u,v) = \mathrm{Signal}_{\mathrm{Eingang}}(u,v) \cdot H(u,v)$$

mit $\mathrm{MTF}(u,v) = |H(u,v)|$ folgt

$$\mathrm{Signal}^2_{\mathrm{Ausgang}}(u,v) = G^2 \cdot \mathrm{Signal}^2_{\mathrm{Eingang}}(u,v) \cdot \mathrm{MTF}^2(u,v)$$

wobei G = Verstärkungsfaktor des abb. Systems (Gain)

$\Rightarrow$ **verallgemeinerte DQE**

$$\boxed{\mathrm{DQE}(u,v) = G^2 \cdot \mathrm{MTF}^2(u,v) \cdot \frac{\mathrm{NPS}_{\mathrm{Eingang}}(u,v)}{\mathrm{NPS}_{\mathrm{Ausgang}}(u,v)}}$$

DQE und MTF in abbildenden Systemen

aus $DQE(u,v) = G^2 \cdot MTF^2(u,v) \cdot \dfrac{NPS_{Eingang}(u,v)}{NPS_{Ausgang}(u,v)}$

folgt: $NPS_{Ausgang}(u,v) = G^2 \cdot \dfrac{MTF^2(u,v)}{DQE(u,v)} \cdot NPS_{Eingang}(u,v)$

falls DQE(u,v) flach bis zu großen Raumfrequenzen, dann reduziert MTF(u,v) Rauschleistungsspektrum bei großen Raumfrequenzen

falls DQE(u,v) $\rightarrow$ 0 noch vor MTF, dann wird Rauschleistungsspektrum in diesem Frequenzband sehr groß

DQE und MTF in abbildenden Systemen

- MTF bei realen abbildenden Systemen immer endlich
  Bandbegrenzung, Korrelationen
  räumliche Auflösung beschränkt

- Rauschen in realen abbildenden System immer vorhanden
  (z.B. wg. Quantenrauschen und Poisson-Statistik)

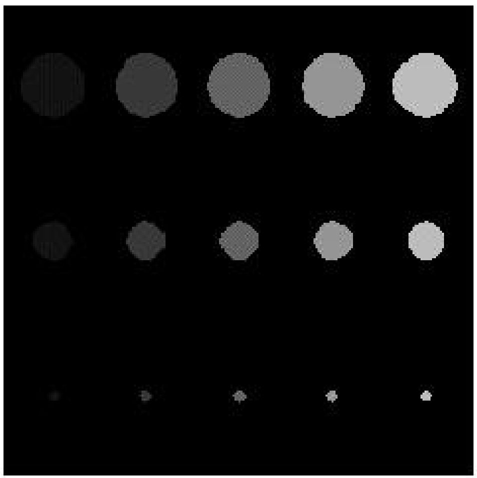
- DQE bei realen abbildenden System immer < 1

- Eine Erhöhung der DQE führt zu einer Verminderung der MTF
  und umgekehrt

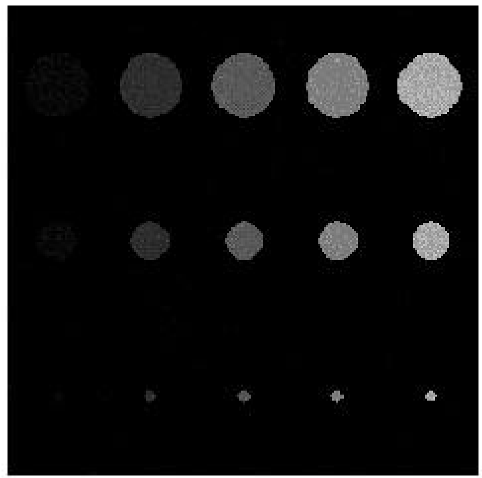
Definitionen

Rauschen

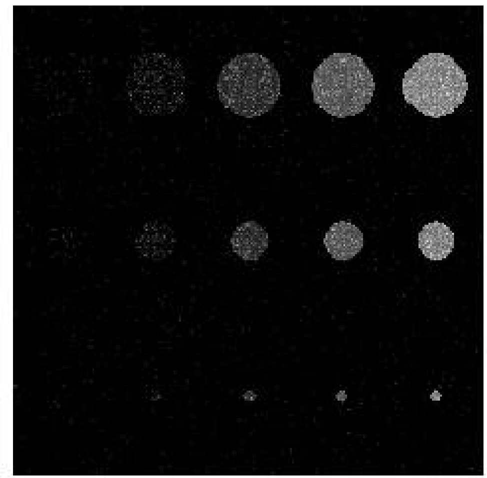
DQE und MTF in abbildenden Systemen



ohne Rauschen



256 Quanten pro Pixel
Rauschen +/- 16



16 Quanten pro Pixel
Rauschen +/- 4

Digitalisierung:
Umwandlung von kontinuierlichen (Amplituden) Grauwerten in digitale(Amplituden) Grauwerte

Quantisierung:
Umwandlung eines analogen (Signals) Bildes in diskrete (Werte) Pixel

Quantisierungs-Fehler:
Beispiel: 10 bit ADC

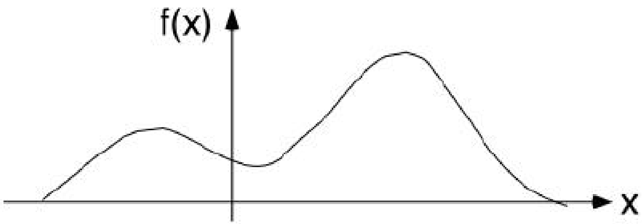
0 - 1024

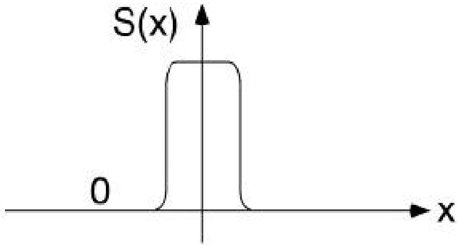
Einzelwert $q = \frac{1024}{2^{10}}$ = 1

Quantisierungsfehler (q/2) = 0,5

Definitionen **Abtastung**

Gegeben: Bild f(x,y) und Sensoren mit Empfindlichkeitskurven S(x,y)





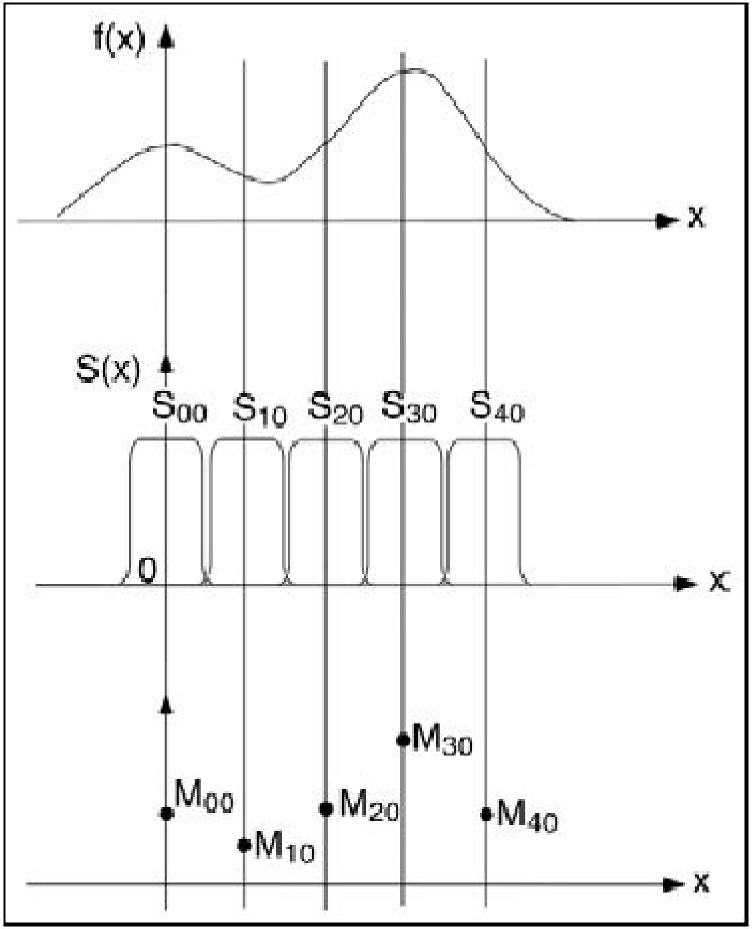
Meßsignal von Sensor (n,m):

$$\boxed{M_{nm} = \iint f(x,y) \cdot S(x - n \cdot \Delta x, y - m \cdot \Delta y)\,dx\,dy}$$

Mathematisch: S(x,y) = 2D-Dirac-Funktion
Multiplikation des Bildes mit **Kammfunktion**, die im Zentrum der Pixel den Wert 1 und sonst 0 hat (Faltung!)

Definitionen

Abtastung



Definitionen **Abtasttheorem**

Signalverarbeitung:

Abtastintervall und Nyquist-Frequenz

$$v_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} v(t) d(t - n\Delta t)$$

$$v_n = v(n\Delta t); \quad n = \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$$

$?t$ heißt Abtastintervall

$$w_{Nyquist} \equiv \frac{1}{2\Delta t}$$

Definitionen

Abtasttheorem

Die kontinuierliche Funktion $v(\mathrm{t})$ sei bandbegrenzt und mit einem Abtastintervall $\Delta\mathrm{t}$ abgetastet, d.h.

$$V(w) = 0 \quad \forall |w| > w_{Nyquist}$$

wobei $V(\omega)$ das Leistungsspektrum von $v(\mathrm{t})$ ist.

Dann ist $v(\mathrm{t})$ vollständig durch die Abtastwerte v_n bestimmt:

$$v(t) = \Delta t \sum_{n=-\infty}^{+\infty} v_n \frac{\sin\left[2pw_{Nyquist}(t - n\Delta t)\right]}{p(t - n\Delta t)} \propto v(t) * \mathrm{sinc}\left(\frac{t}{\Delta t}\right)$$

Definitionen **Abtasttheorem**

Bildverarbeitung:
Abtastintervall und Nyquist-Frequenz

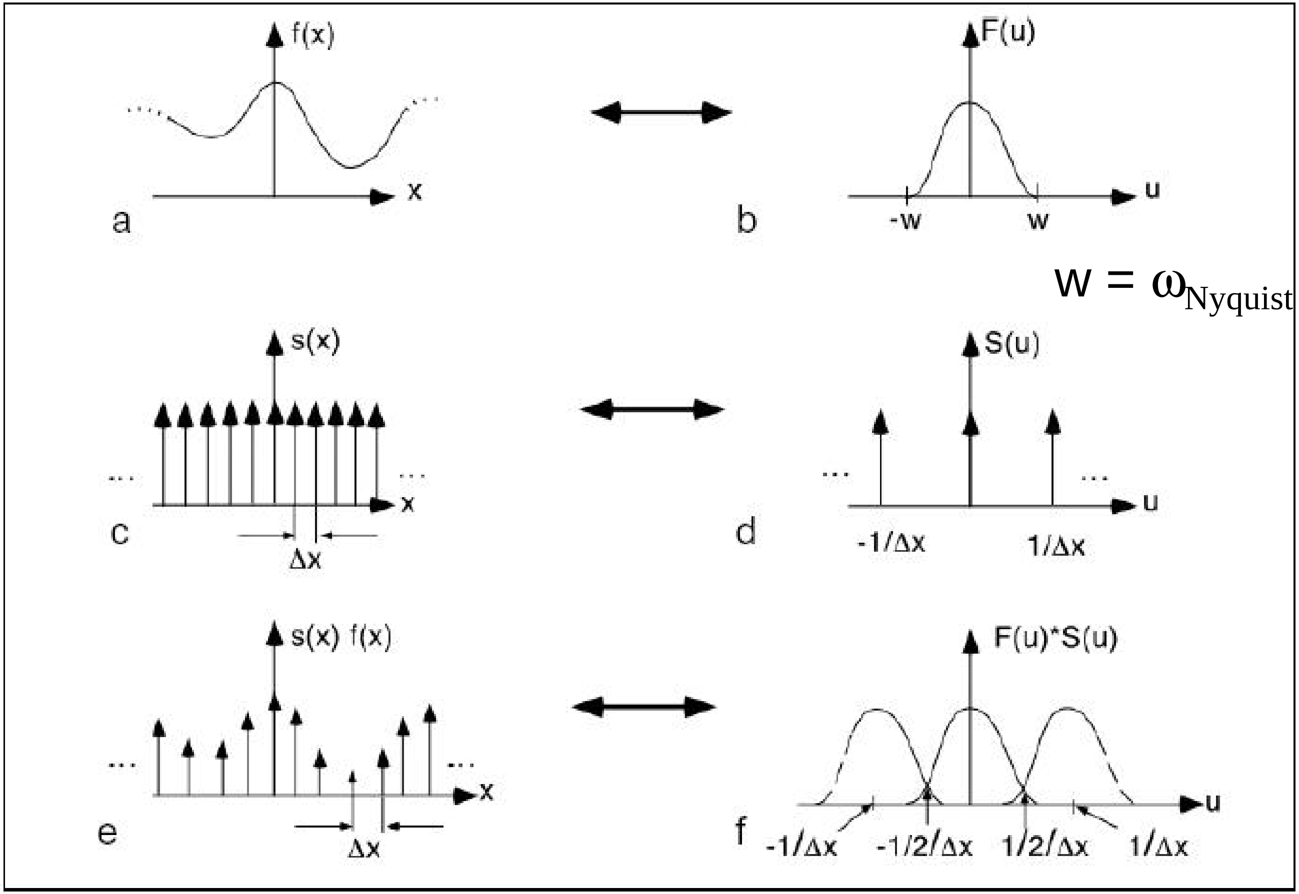
$?x$ heißt räumliches Abtastintervall

$$w_{Nyquist} \equiv \frac{1}{2\Delta x}$$

$w_{Nyquist}$ ist die größte vorkommende Raumfrequenz

Definitionen

Abtasttheorem



$w = \omega_{\text{Nyquist}}$

Definitionen **Aliasing**

- tritt auf beim Abtasten einer nicht-bandbegrenzten kontinuierlichen Funktion

$$V(w) \neq 0 \quad |w| > w_{Nyquist}$$

- diese spektralen Anteile werden in das Intervall $|w| \leq w_{Nyquist}$ gefaltet.

Lösung:

(1) natürliche Bandbreite des Signals *a priori* bekannt oder durch Filterung vor dem Abtasten begrenzen

(2) adäquat abtasten

Definitionen **Aliasing**