# *Bivariate Zeitreihenanalyseverfahren*

## Tests auf Nichtlinearität — Statistik

Skewness, Kurtosis für zirkuläre Maße (z.B. Phasenkohärenz *R*)

Problem: nur statische Nichtlinearitäten

Ansatz: transformiere Phasen (Phasendifferenzen) auf Einheitskreis

$$\overline{C} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\cos j_i;\ \overline{S} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sin j_i$$

$$m_1 = \overline{C} + i\overline{S} = \overline{R}\,e^{i\overline{x}_0} \qquad (\overline{x}_0 = \arctan\frac{\overline{S}}{\overline{C}})$$

allgemeiner Ansatz (Momente $p$ - ter Ordnung)

$$m'_p = a_p + ib_p$$

$$a_p = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\cos pj_i;\ b_p = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\sin pj_i$$

$$m'_p = \overline{R}_p e^{im_p}$$

*Mardia, 1972)*

# Tests auf Nichtlinearität



mit $m'_p = \overline{R}_p e^{im_p}$

folgt für $p = 1$:

$$a_1 = \overline{C}\,;\; b_1 = \overline{S}\,;\; R_1 = \overline{R}\,;\; m_1 = \overline{x}_0 = \arctan\frac{\overline{S}}{\overline{C}}$$

Def.: ***zirkuläre Skewness***

$$Skew_{circ} = \overline{R}_2 \sin\left(m_2 - 2\overline{x}_0\right) / S^{3/2} \quad (S = 1 - \overline{R})$$

$Skew_{circ} \approx 0$ für unimodale symmetrische Verteilungen

Def.: ***zirkuläre Kurtosis***

$$Kurt_{circ} = \left[\overline{R}_2 \cos(m_2 - 2\overline{x}_0) - (1 - S)^4\right] / S^2$$

$$Kurt_{circ} = \begin{cases} > 0 \text{ platykurtisch} \\ = 0 \text{ unimodal} \\ < 0 \text{ leptokurtisch} \end{cases}$$

## *Bivariate Zeitreihenanalyseverfahren*

# Tests auf Nichtlinearität Fourierraum

# Spektren höherer Ordnung

C.L. Niklas & A.P. Petropulu: Higher-order spectral analysis: a nonlinear signal processing framework. Prentice Hall, New Jersey, 1993
T. Subba Rao & M.M. Gabr: An introduction to bispectral analysis and bilinear time series models. Lecture Notes in Statistics, vol. 24, Springer, Berlin, 1984

### *Polyspektren/Kumulanten/Statistische Momente:*

| | | |
|---|---|---|
| Leistungsspektrum | Kumulant 2. Ordnung | Moment 2.Ordnung |
| $P$=1-DFT(AKF$^{(2)}$) | AKF$^{(2)}(\tau) \propto x(t)\, x(\tau)$ | Varianz |
| Bispektrum | Kumulant 3. Ordnung | Moment 3.Ordnung |
| $B$=2-DFT(AKF$^{(3)}$) | AKF$^{(3)}(\tau) \propto x(t)\, x(\tau)\, x(2\tau)$ | Skewness |
| Trispektrum | Kumulant 4. Ordnung | Moment 4.Ordnung |
| $T$=3-DFT(AKF$^{(4)}$) | AKF$^{(4)}(\tau) \propto x(t)\, x(\tau)\, x(2\tau)\, x(3\tau)$ | Kurtosis |

*Bivariate Zeitreihenanalyseverfahren*

# Tests auf Nichtlinearität

**Fourierraum**

# Spektren höherer Ordnung

Erweiterung für bivariaten Fall (speziell: 2. Ordnung)
gegeben zwei stochastische Prozesse $x(t)$, $y(t)$

Def.: ***Kreuz-Bispektren***

$$B^{xxy}(f_x, f_y) = \left\langle X(f_x)X(f_y)Y^*(f_x+f_y)\right\rangle$$

$$B^{xyy}(f_x, f_y) = \left\langle X(f_x)Y(f_y)Y^*(f_x+f_y)\right\rangle$$

$$B^{yyx}(f_x, f_y) = \left\langle Y(f_x)Y(f_y)X^*(f_x+f_y)\right\rangle$$

$$B^{yxx}(f_x, f_y) = \left\langle Y(f_x)X(f_y)X^*(f_x+f_y)\right\rangle$$

$$X(f) = FT\,(x(t))$$
$$Y(f) = FT\,(y(t))$$

# *Bivariate Zeitreihenanalyseverfahren*

## Tests auf Nichtlinearität — Fourierraum

## Spektren höherer Ordnung

Erweiterung für bivariaten Fall (speziell: 2. Ordnung)
gegeben zwei stochastische Prozesse $x(t)$, $y(t)$

Def.: ***Bikohärenz*** (Kohärenz 3. Ordnung)

- normalisiertes Bispektrum
  (Normierungsfaktoren: Leistungsspektren, Kreuzspektrum)
- Definitionsbereich: [0,1]
- erlaubt Detektion von quadratischen Phasenkopplungen
  (peaks der Bikohärenz bei bestimmten Frequenz-Paaren)

- Probleme:
  Rechenaufwand, Rauschen, Statistik (erfordert lange Zeitreihen)

# *Bivariate Zeitreihenanalyseverfahren*

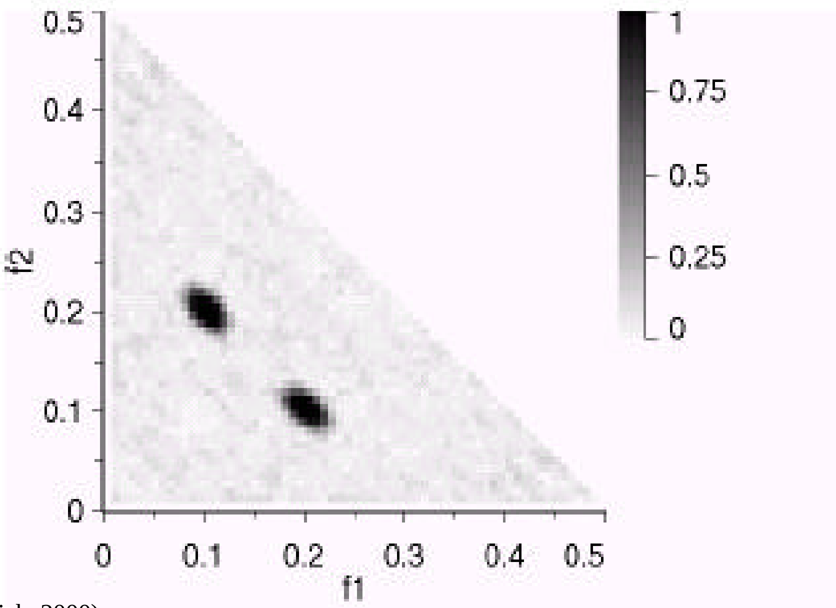
## Tests auf Nichtlinearität Fourierraum

## Bikohärenz

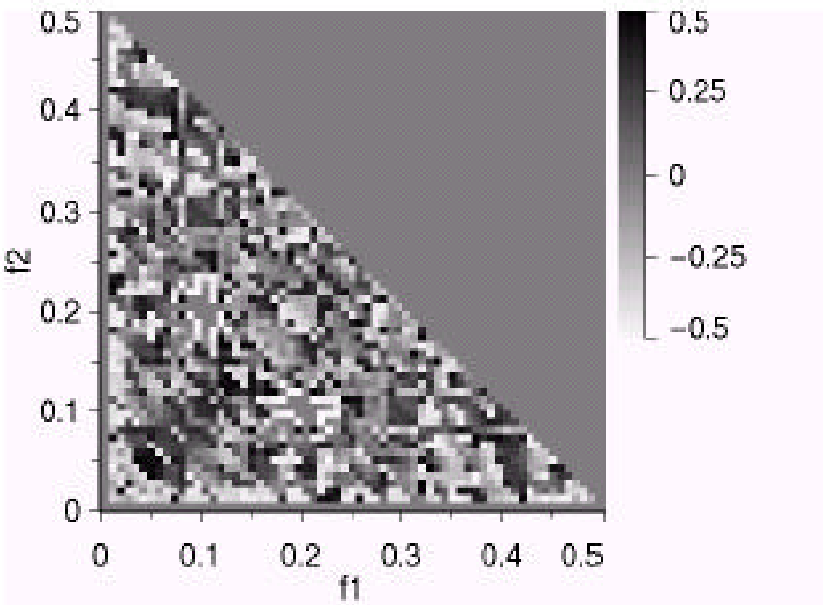
Beispiel: 3-Wellensystem mit quadratischer Phasenkopplung (3 Moden):

$$y(k) = \cos\left[2p\,(f_1 k + j_1)\right] + \cos\left[2p\,(f_2 k + j_2)\right] + \cos\left[2p\,\{f_1 + f_2\}k + j_1 + j_2\right]$$

Betrag(Bikohärenz)




Phase(Bikohärenz)




(Diplomarbeit K. Ulbrich, 2000)

# *Bivariate Zeitreihenanalyseverfahren*

## Tests auf Nichtlinearität

***Surrogat***

- "Ersatzstoff"

- versucht Eigenschaften des Originals zu reproduzieren

***Überprüfung einer speziellen Eigenschaft (z.B. Nichtlinearität)***

- zu untersuchende Eigenschaft darf im Surrogat nicht enthalten sein

- alle anderen Eigenschaften müssen vom Surrogat reproduziert werden

- Nullhypothesen-Test:
  (z.B. $H_0$ = Die Daten wurden von stationären, Gaußschen, linearen
  stochastischen Prozeß generiert)

- parametrisch / nicht-parametrische Statistik

# *Bivariate Zeitreihenanalyseverfahren*

## Tests auf Nichtlinearität

Wiederholung: ***Erstellung von univariaten Surrogaten***

bedingte Realisationen:
(bootstrapping, keine Modellanpassung notwendig !)

- "random shuffling"

- Phasenrandomisierung unter Erhaltung des Amplitudenspektrums (FT)

- amplitudenangepaßte phasenrandomisierte Surrogate (AAFT)

- iterativ amplitudenangepaßte phasenrandomisierte Surrogate (IAAFT)

# *Bivariate Zeitreihenanalyseverfahren*

## Tests auf Nichtlinearität

### *bi-/multivariate Surrogate*

(Prichard & Theiler, PRL 73, 951, 1994)

**multivariate phasenrandomisierte Surrogate *(MFT)***

*Basis*: phasenrandomisierte univariate Surrogate (FT)

*Forderung*: *MFT*-Surrogat soll lineare Korrelationen innerhalb der einzelnen Zeitreihen reproduzieren und lineare Korrelationen zwischen ihnen

*gegeben*: $M$ simultan gemessene Observablen $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_M(t)$ mit Mittelwert 0 und Varianz 1;
$X_1(f)$, $X_2(f)$, ..., $X_M(f)$ seien die jeweiligen Fouriertransformierten

Kreuzspektrum: $X_j^*(f)X_k(f) = A_j(f)A_k(f)e^{i\left(j_k(f)-j_j(f)\right)}$

**Nichtlinearität in Phasendifferenz !**

# *Bivariate Zeitreihenanalyseverfahren*

# Tests auf Nichtlinearität

***bi-/multivariate Surrogate***

(Prichard & Theiler, PRL 73, 951, 1994)

*Nullhypothese*: Daten wurden von stationären, linear korrelierten Gaußschen stochastischen Prozessen generiert

*Methode*:

erhalte lineare Eigenschaften:

Kreuzspektrum (Wiener-Khinchin: Kreuzkorrelationsfunktion)

randomisiere nichtlineare Eigenschaften:

ersetze Phasendifferenzen $\delta\varphi(f) = \varphi_k(f) - \varphi_j(f)$ durch $\phi(f) \in [0,2\pi]$

Rücktransformation ergibt *MFT*:

$$\tilde{x}_j(f) = F^{-1}(X_j(f)e^{if(f)}) \quad \forall j$$

# *Bivariate Zeitreihenanalyseverfahren*

## Tests auf Nichtlinearität

### *bi-/multivariate Surrogate*

(Schreiber & Schmitz, Physica D 142, 346, 2000)

**multivariate iterativ amplitudenangepasste phasenrandomisierte Surrogate *(MIAAFT)***

*Basis*: univariate IAAFT-Surrogate

*Forderung (wie MFT)*: Surrogat soll lineare Korrelationen innerhalb der *einzelnen* Zeitreihen reproduzieren und lineare Korrelationen *zwischen* ihnen

*zusätzlich zu MFT*: iterative Erhaltung der *jeweiligen* (möglicherweise nicht-Gaußschen) Amplitudenverteilungen

# *Bivariate Zeitreihenanalyseverfahren*

# Tests auf Nichtlinearität

## *bi-/multivariate Surrogate*

(Schreiber & Schmitz, Physica D 142, 346, 2000)

*Methode*:

ersetze Phasendifferenzen $\delta\varphi\,(f) = \varphi_k(f) - \varphi_j(f)$ durch $\phi\,(f) \in [0,2\pi]$

mit den Eigenschaften:

(1) Erhaltung der Original-Phasendifferenzeigenschaften:

Ansatz: wähle $\phi_n(f) = \text{Rang}(\varphi_n(f)) + \boldsymbol{a}_n$

wähle $\boldsymbol{a}_n$ so, das $\varphi_n(f)$ möglichst wenig geändert wird

$$\tan \boldsymbol{a}_n = \frac{\sum_{m=1}^{M} \sin(j_n - Rang(j_n))}{\sum_{m=1}^{M} \cos(j_n - Rang(j_n))}$$

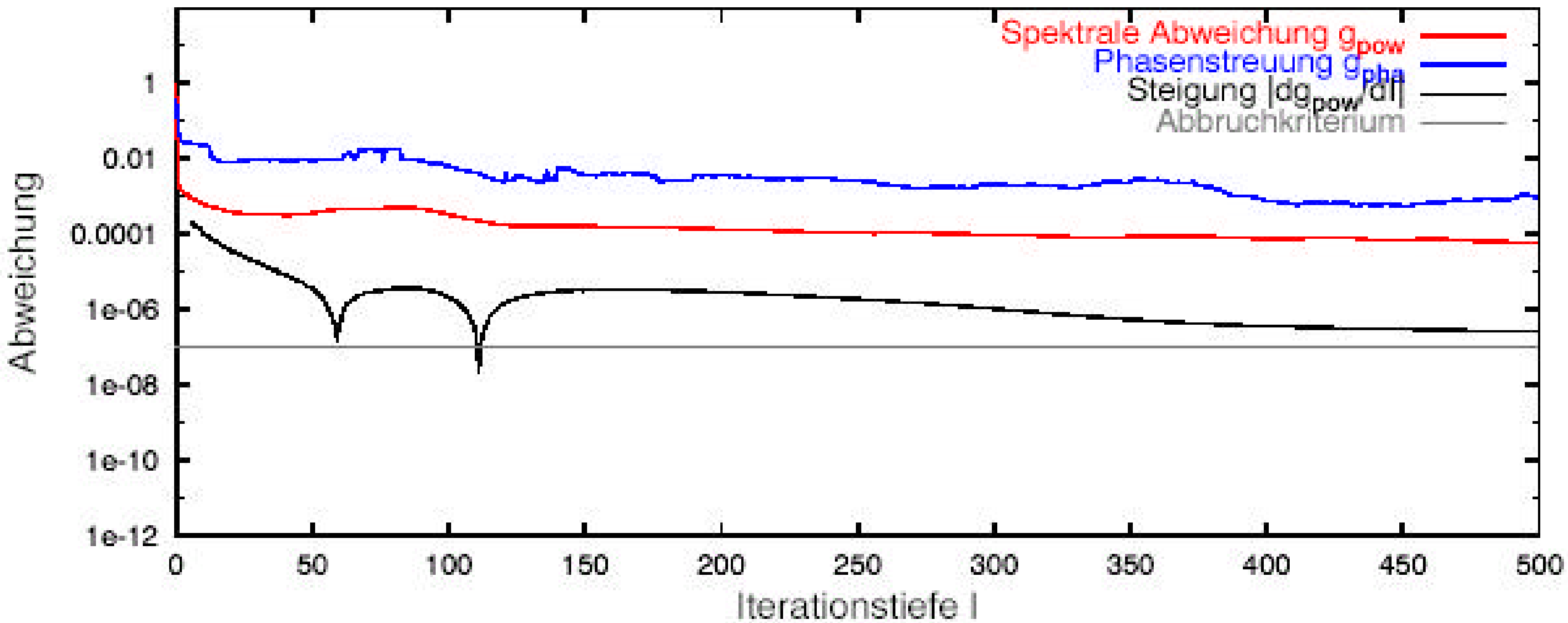
(2) Ersetzung minimal im *least-squares* Sinne: $\sum_{m=1}^{M} \left| e^{if(f)} - e^{i(j_k(f) - j_m(f))} \right|^2 \overset{!}{=} \min$

# *Bivariate Zeitreihenanalyseverfahren*

## Tests auf Nichtlinearität

Iterationsverhalten:

MIAAFT für gekoppelte harmonische Oszillatoren (CML)

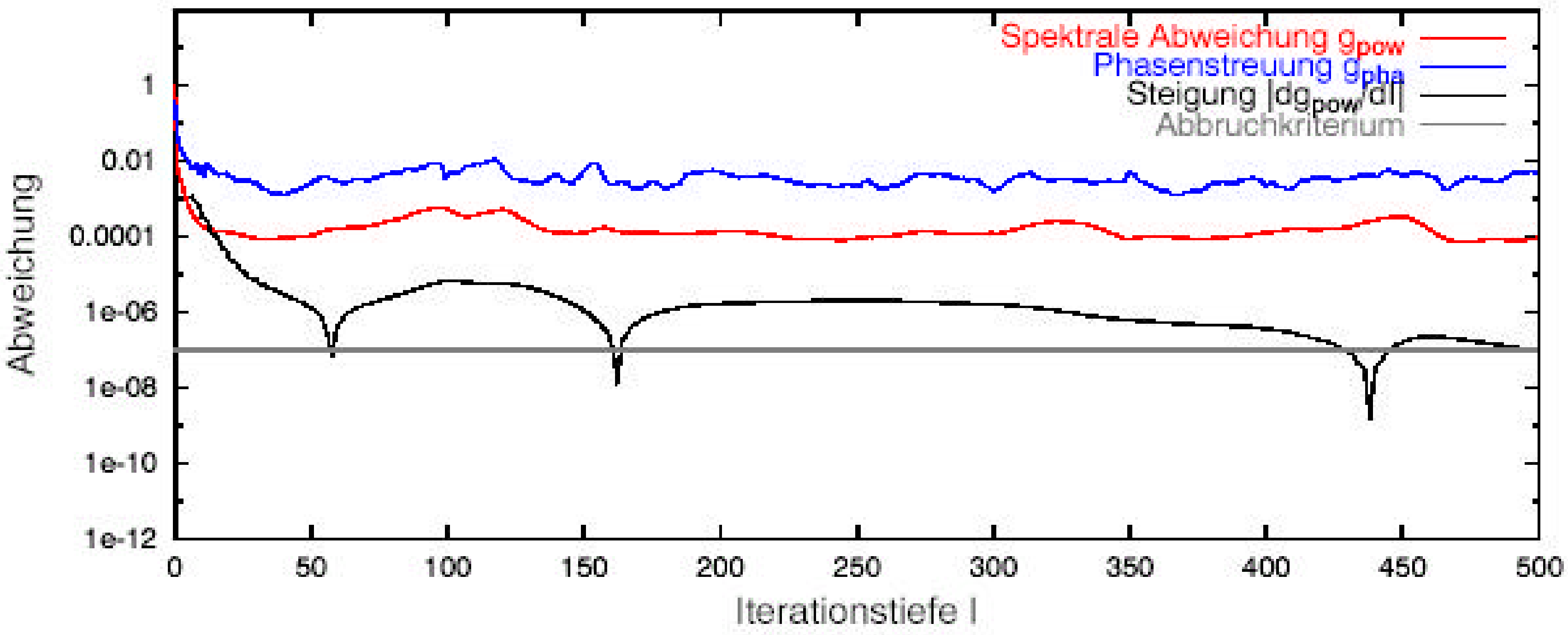



(Diplomarbeit J. Schumacher, 2002)

*Bivariate Zeitreihenanalyseverfahren*

# Tests auf Nichtlinearität

Iterationsverhalten:
MIAAFT für Gaußverteiltes isospektrales Rauschen
(Surrogate von gekoppelten harmonischen Oszillatoren (CML))

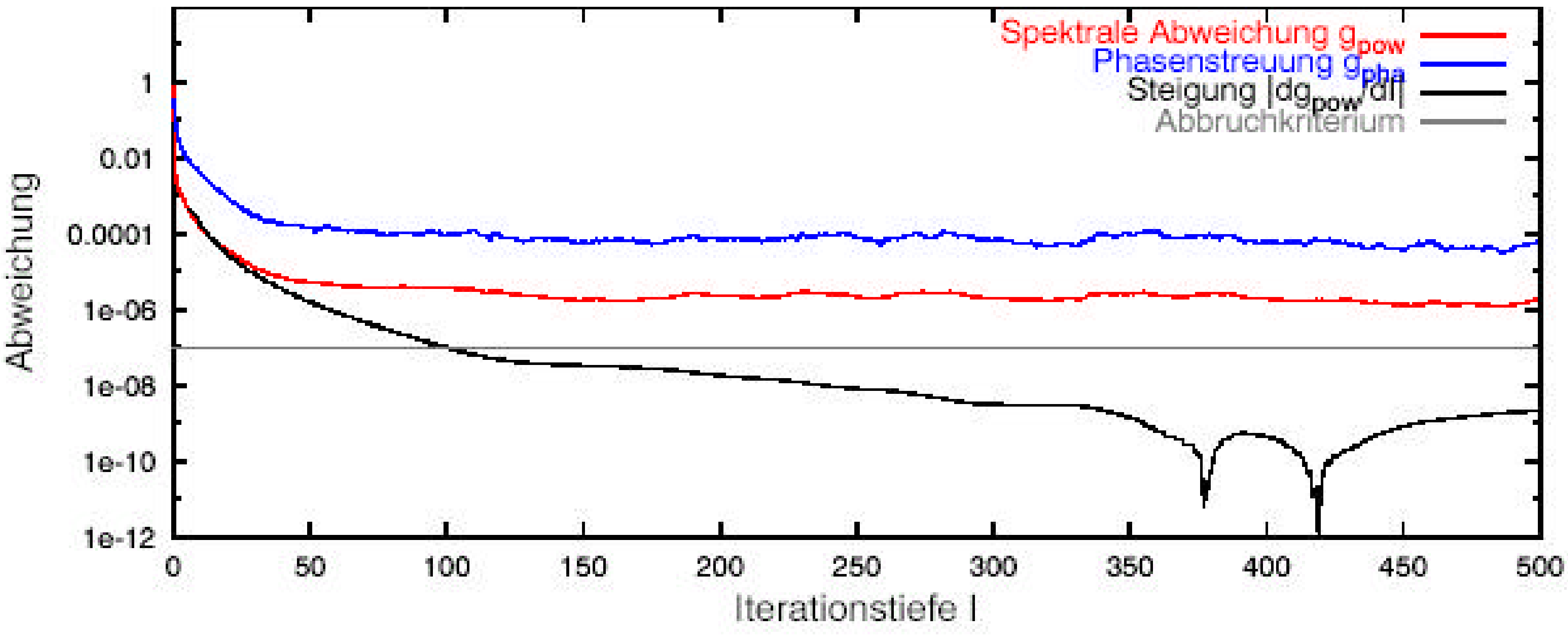



(Diplomarbeit J. Schumacher, 2002)

# *Bivariate Zeitreihenanalyseverfahren*

## Tests auf Nichtlinearität

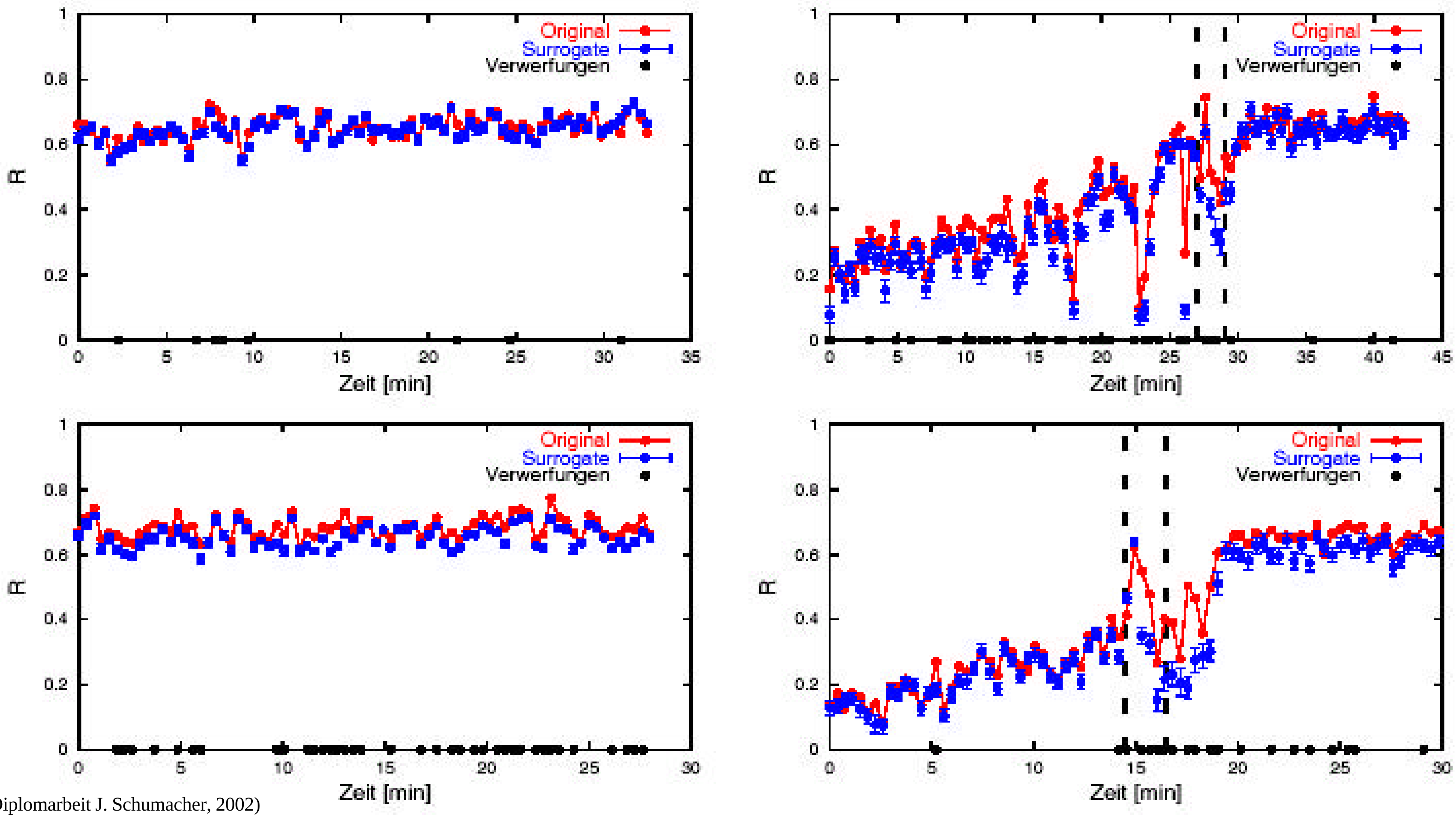
Iterationsverhalten:
MIAAFT für gekoppelte Rössler-Systeme (CML)




(Diplomarbeit J. Schumacher, 2002)

# *Bivariate Zeitreihenanalyseverfahren*

## Tests auf Nichtlinearität (Phasenkohärenz R und Anfallsvorhersage)




(Diplomarbeit J. Schumacher, 2002)

# Tests auf Nichtlinearität

## *bivariate Surrogate für kohärente Daten*

(Dolan & Neimann, PRE 65, DOI 026108, 2002)

### *coherent digitally filtered Surrogate (CDF)*

*Problem*: Artefakte in bivariaten Surrogaten bei (fast-)kohärenten Daten

*Forderung*: erhalte Spektrum, Kreuzspektrum *und* Kohärenzfunktion
*Hypothese*: Eigenschaften der Kohärenzfunktion durch Nichtlinearität gegeben

*Ansatz*: erzeuge Vergleichs-Kohärenzfunktion aus zwei statistisch unabhängigen linearen stochastischen Prozessen $v(t)$ und $w(t)$

$$x(t) = av(t) + (1-a)w(t)$$

$$y(t) = (1-a)v(t) + aw(t)$$

$a$ = 0,5 vollständige Kohärenz; $a$ = 0 keine Kohärenz

# Tests auf Nichtlinearität

***coherent digitally filtered Surrogate (CDF)***

bestimme frequenzabhängige Kohärenzfunktion für *x(t)* und *y(t):*

$$C(f) = \frac{2a(f)\left[1 - a(f)\right]}{a^2(f) + \left[1 - a(f)\right]^2}$$

Invertierung ergibt Filterfunktion *a(f)*

$$a(f) = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{C(f)}{2\left[1 + C(f)\right]}}$$

Multiplikation der jeweiligen Fourierspektren mit Filterfunktion *a(f)* erhält Kohärenzfunktion der Surrogate bzgl. Kohärenzfunktion der Originale