

nichtlineare dynamische Systeme

dynamische Systeme:

- Systeme mit Krafteinwirkung ($\delta\nu\nu\alpha\mu\iota\omicron = \text{Kraft}$)
- **zeitabhängige** Systemzustände
- Zustandsänderung abhängig vom momentanen Zustand

deterministisch



gleiche Umstände - gleiche Entwicklung

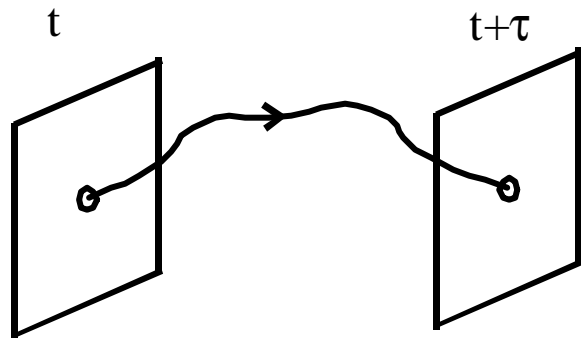
stochastisch

gleiche Umstände - stochastische Entwicklung,
Wahrscheinlichkeitsverteilung abh. vom momentanen
Zustand

Nichtlinearität und Kausalität

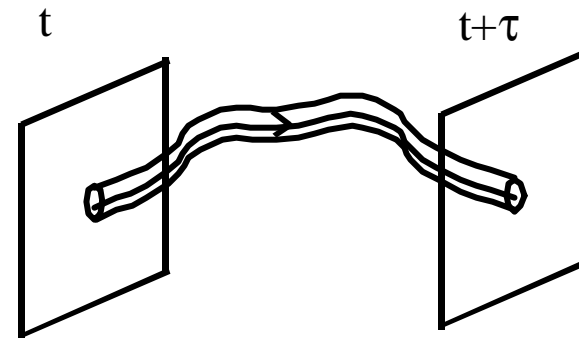
Lineare Systeme

schwache Kausalität:
gleiche Ursachen haben
gleiche Wirkungen



starke Idealisierung;
keine Berücksichtigung
experimenteller Situationen

starke Kausalität:
ähnliche Ursachen haben
ähnliche Wirkungen

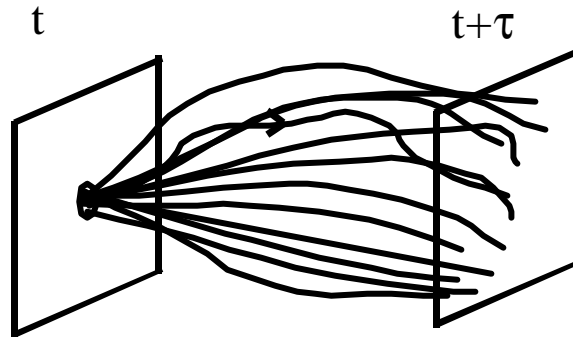


schließt schwache Kausalität ein;
berücksichtigt experimentelle
Situationen: kleine Abweichung in
Anfangsbedingungen; Störungen des
Systems; systematische Fehler, ...

Nichtlinearität und Kausalität

Nichtlineare Systeme

*Verletzung der starken Kausalität:
ähnliche Ursachen haben
unterschiedliche Wirkungen*



- sensitive Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen
deterministisches Chaos
- Musterbildung
"das Ganze ist mehr als die Summe seiner Teile"
Selbstorganisation

Charakterisierung einer Dynamik

Maß	Eigenschaften	Charakterisierung
Dimension	statisch	Skalenverhalten, Anzahl der Freiheitsgrade, Komplexität
Lyapunov-Exponenten	dynamisch	Divergenz/Konvergenz, Langzeitverhalten, Stabilität, Prädiktionszeit
Entropie	dynamisch	Unordnung, Information, Komplexität, Prädiktionszeit

Charakterisierung einer Dynamik

Dynamik	Eigenschaften	charakterisierende Maße
regulär	deterministisch Langzeitverhalten prädizierbar starke Kausalität	D ganzzahlig, $\lambda_1 = K = 0$
chaotisch	deterministisch begrenzt prädizierbar Verletzung der starken Kausalität Nichtlinearität	D fraktal, $(\lambda_1, K) > 0$
stochastisch	Rauschen/Zufall nicht prädizierbar unkontrollierte Einflüsse äußere Störungen	$(D, \lambda_1, K) \rightarrow \infty$

Charakterisierung einer Dynamik

Wie gut können
Dimensionen, Lyapunov-Exponenten und Entropien
verschiedene Dynamiken wirklich charakterisieren ?

Probleme
Datenpunkt-Anzahl, Genauigkeit, Rauschen (andere)

Trennung
Determinismus - Stochastizität ?

Zeitreihenanalyse

	Experiment:	Modell:
Länge der Zeitreihe	begrenzt	beliebig
Abtast- intervall	begrenzt	beliebig
Genauig- keit	A/D-Wandler Rauschen	beliebig

Determinismus / Stochastizität

Wold-Zerlegung:

Jeder stationäre (lineare oder nichtlineare) Prozeß kann in eine Summe von unkorrelierten deterministischen und nichtdeterministischen Komponenten zerlegt werden.

Zeitbereich:

$$v(t) = d(t) + n(t)$$

Frequenzbereich:

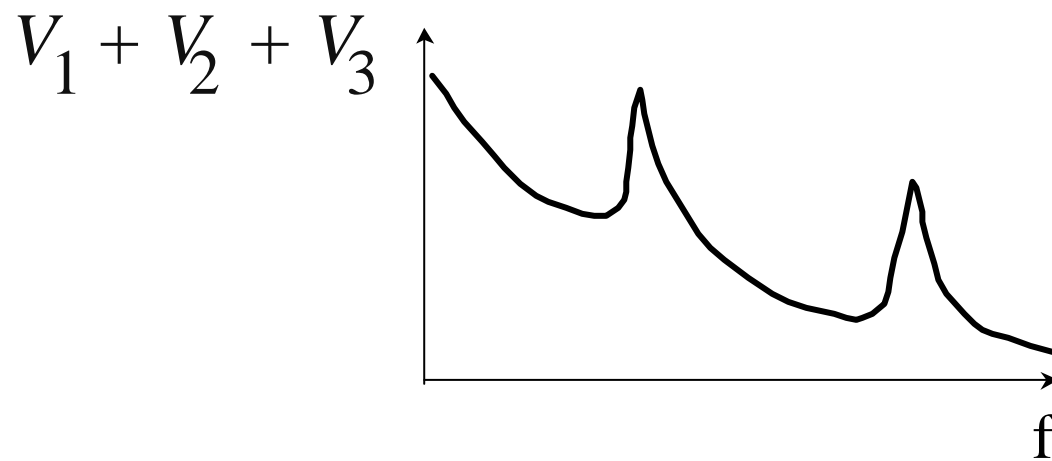
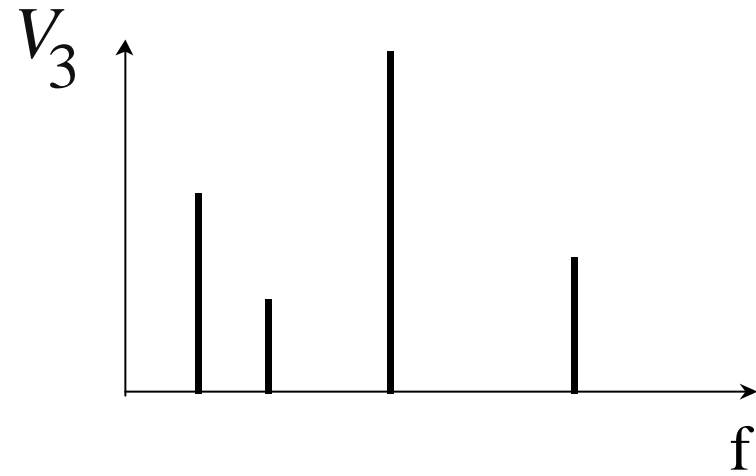
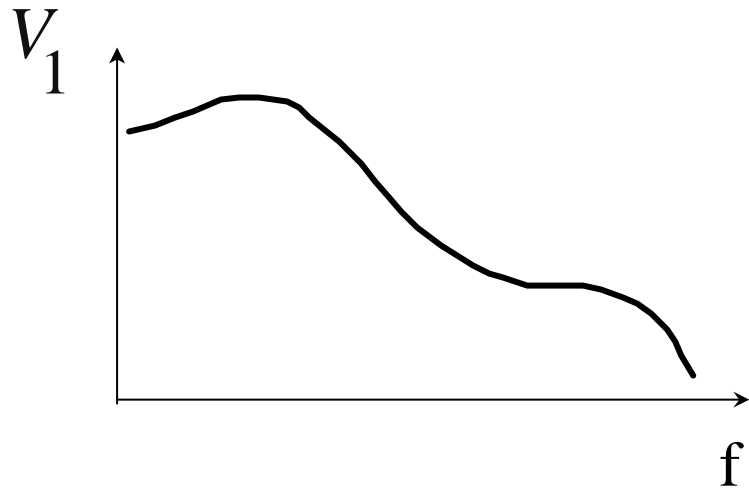
$$V(f) = V_1(f) + V_2(f) + V_3(f)$$

V_1 absolut stetig (fast überall differenzierbar)

V_2 monoton wachsende/fallende Sprungfunktion (Treppenfunktion)

V_3 singuläre Funktion

Wold-Zerlegung (Frequenzbereich):



Determinismus / Stochastizität

lineare Modellierung (ARMA-Prozeß):

deterministische Komponente

Autoregressiver Prozeß
(AR) der Ordnung p

$$d(t) = \sum_{i=1}^p a_i v(t-i)$$

nichtdeterministische Komponente

Moving-Average Prozeß
(MA) der Ordnung q

$$n(t) = \sum_{i=1}^q b_i \eta(t-i) \quad \eta \in N(0,1)$$

Determinismus / Stochastizität

nichtlineare Modellierung (ARMA-Prozeß):

deterministische
Komponente

$$d(t) = \sum_{i=1}^p a_i F_{t-i}[v(\tau), \eta(\tau)] v(t-i)$$

nichtdeterministische
Komponente

$$n(t) = \sum_{i=1}^q b_i G[x(\tau), \eta(\tau)] \eta(t-i)$$

$\eta \in N(0,1)$

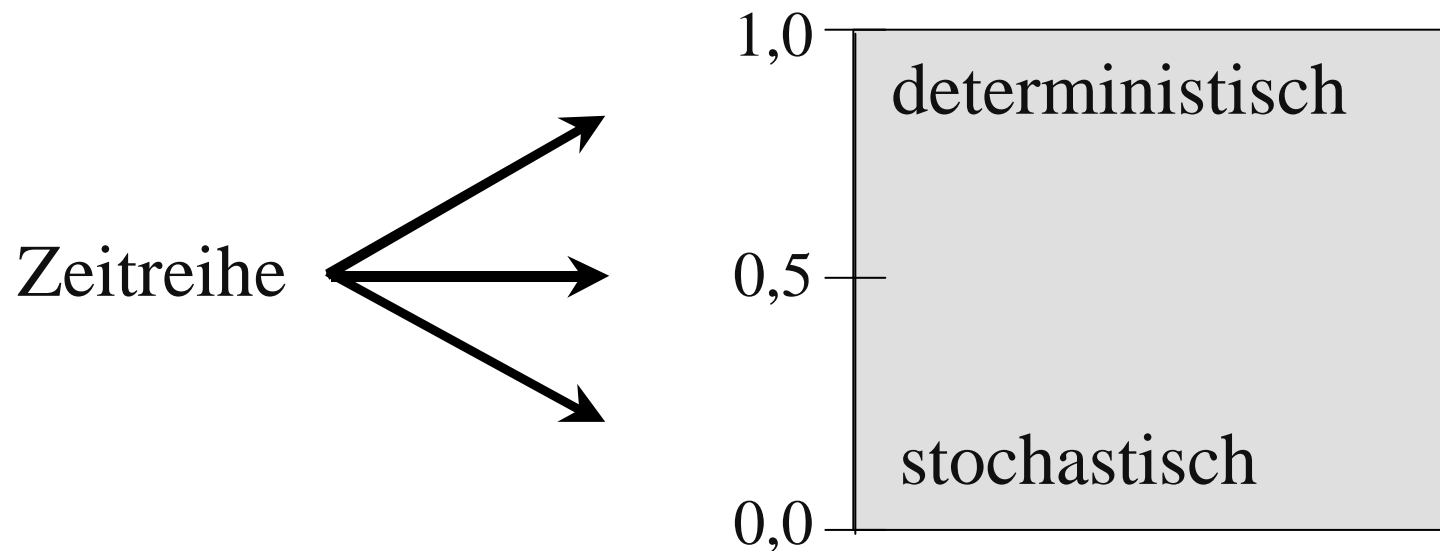
nichtlineare Kernelfunktionen:

$$F_{t-i}[v(\tau), \eta(\tau)], G[x(\tau), \eta(\tau)] \quad \text{mit } \tau \leq t-i$$

Determinismus / Stochastizität

Problem: Wold-Zerlegung additiv

- *entweder* deterministisch *oder* stochastisch
- anwendbar auf reale Daten ? deterministisches Chaos ?
- wünschenswert: Abbildung auf $[0,1]$ -Intervall



Determinismus / Stochastizität

betrachte Dynamik eines Systems mit n Zustandsgrößen

Bewegungsgleichung:

kontinuierlich

Satz von
Differentialgleichungen $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$
und Anfangsbedingungen

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t, \lambda)$$

$\lambda =$ Kontrollparameter

diskret

Satz von
Differenzgleichungen
(Abbildungen)

$$\mathbf{x}_{t+\Delta t} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_t, T, \lambda)$$

$\mathbf{f}, \mathbf{F}: R^n \rightarrow R^n$ reellwertige Vektorfunktionen
i.a. nichtlinear

Determinismus / Stochastizität

reguläre Dynamik:

- schwache Kausalität:

gleiche Ursachen haben gleiche Wirkungen

- zu jeder Anfangsbedingung kann spezielle Lösung der Bewegungsgleichung gefunden werden

→ Verlauf der Trajektorien im Phasenraum für jeden Zeitpunkt eindeutig festgelegt

→ keine Selbstüberschneidung der Trajektorie

→ falls Bewegungsgleichung *stetig*:

benachbarte Trajektorienabschnitte stehen parallel zueinander

- in infinitesimal kleinen Volumenelementen gilt

$$\frac{d\mathbf{x}_a}{dt} \rightarrow \frac{d\mathbf{x}_b}{dt} \quad \forall \quad \mathbf{x}_a \rightarrow \mathbf{x}_b$$

Determinismus / Stochastizität

reguläre Dynamik:

- starke Kausalität:

ähnliche Ursachen haben ähnliche Wirkungen

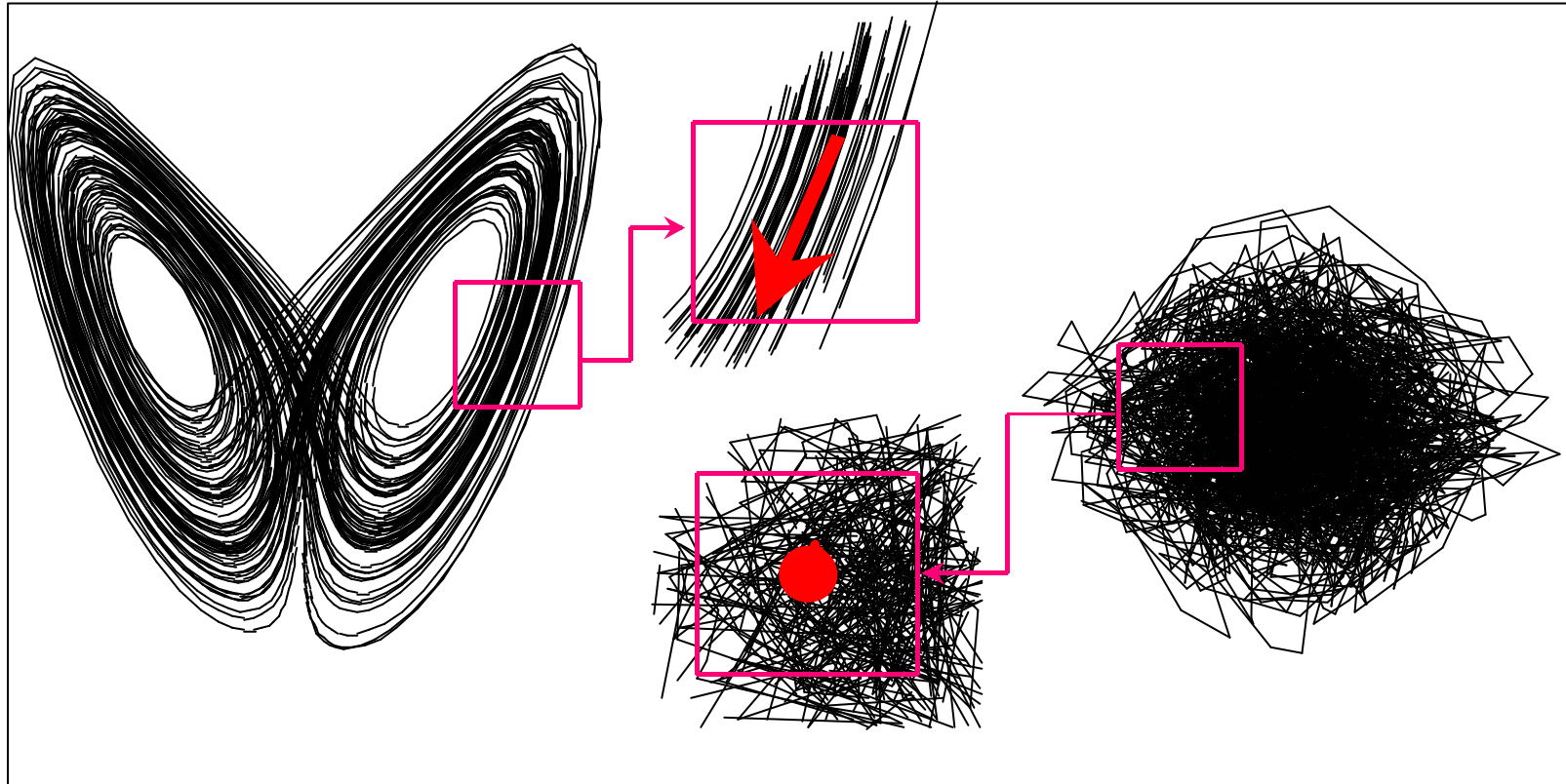
- betrachte endliche Volumenelemente (endliche Kantenlänge)

- Trajektorienabschnitte innerhalb kleiner (endlicher)
Volumenelemente sind zueinander ausgerichtet

→ *lokaler Fluß im Phasenraum*

bei seltsamen Attraktoren nur bedingt richtig (z.B. "leere" Volumenbereiche bei Lorenzsystem), im Mittel (gesamter Attraktor) aber dennoch gültig.

Determinismus / Stochastizität



Determinismus / Stochastizität

Phasenraum-basierte Verfahren
zum Nachweis von Determinismus in Zeitreihen

- D.T. Kaplan und L.Glass, PRL 68, pp. 427, 1992
 - R. Wayland et al., PRL 70, pp. 580, 1993
 - L.W. Salvino und R. Cawley, PRL 73, pp. 1091, 1994
- (- D.T. Kaplan, Physica D 73, pp. 38, 1994)

Determinismus / Stochastizität

Kaplan-Glass Verfahren:

Beobachtung:

Tangente an Trajektorie eines deterministischen Systems ist abhängig von Position im Phasenraum

Determinismus:

→ in einer gegebenen Region im Phasenraum haben alle Tangenten an eine Trajektorie eine *ähnliche* Orientierung

Determinismus / Stochastizität (Kaplan & Glass)

Vorgehensweise:

- Rekonstruktion der Dynamik im Phasenraum

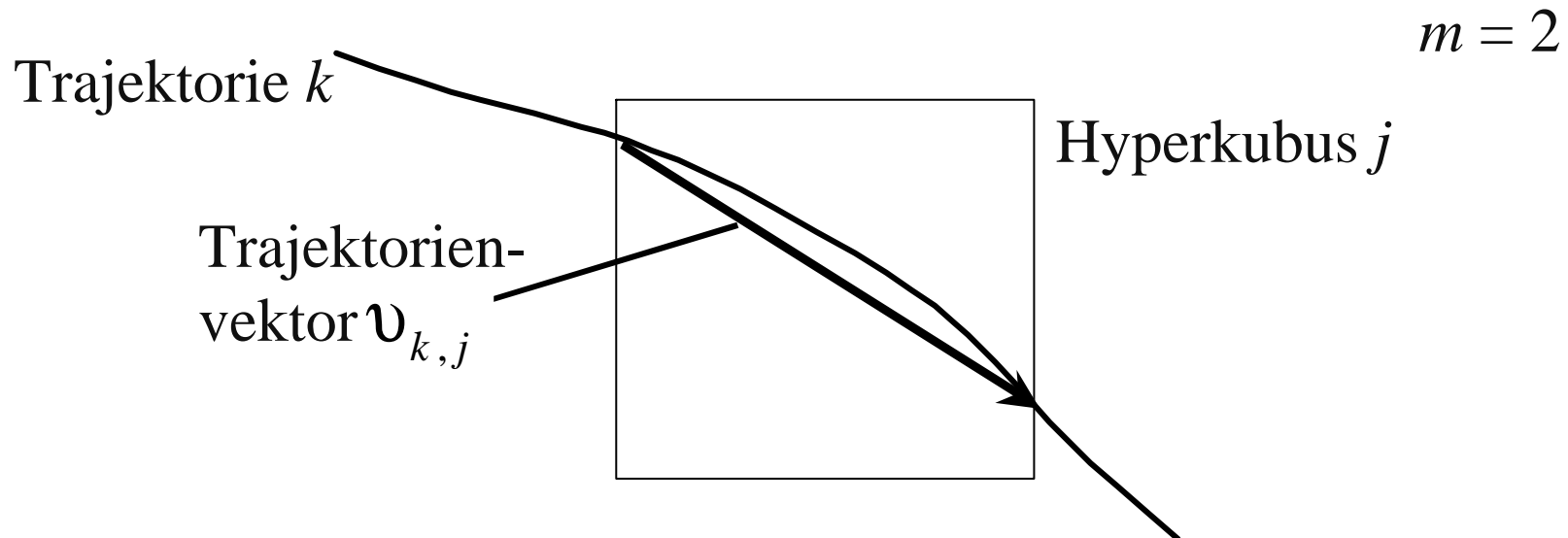
$$\mathbf{v}(t) = (v(t), v(t-\tau), v(t-2\tau), \dots, v(t-m\tau))$$

- grobe Unterteilung des m -dimensionalen Phasenraums in Hyperkuben (coarse graining)
- k -ter Durchgang einer Trajektorie durch Hyperkubus j generiert Trajektorienvektor $\mathbf{v}_{k,j}$

Determinismus / Stochastizität (Kaplan & Glass)

Trajektorienvektor

- **Länge**: 1 (normierter Einheitsvektor)
- **Richtung**: abh. von Vektor zwischen Eintritts- und Austrittspunkt
(mittlere Richtung des Trajektorien durchgangs)
(→ VORTEIL: Tiefpaßfilterung der Dynamik,
weniger rauschanfällig)



Determinismus / Stochastizität (Kaplan & Glass)

Statistik über Trajektorienvektoren

- Trajektorie durchläuft j -ten Hyperkubus n_j -mal
- bilde n_j normierte Trajektorienvektoren (wichtig: alle Durchgänge gleichberechtigt, egal ob *zentral* oder *am Rande*)
- vektorielle Addition und Normierung auf Anzahl der Passagen (alle Hyperkuben sind gleichberechtigt)

- mittlerer Trajektorienvektor:
$$Y_{n_j}^j := \frac{\sum_{k=1}^{n_j} v_{k,j}}{n_j}$$

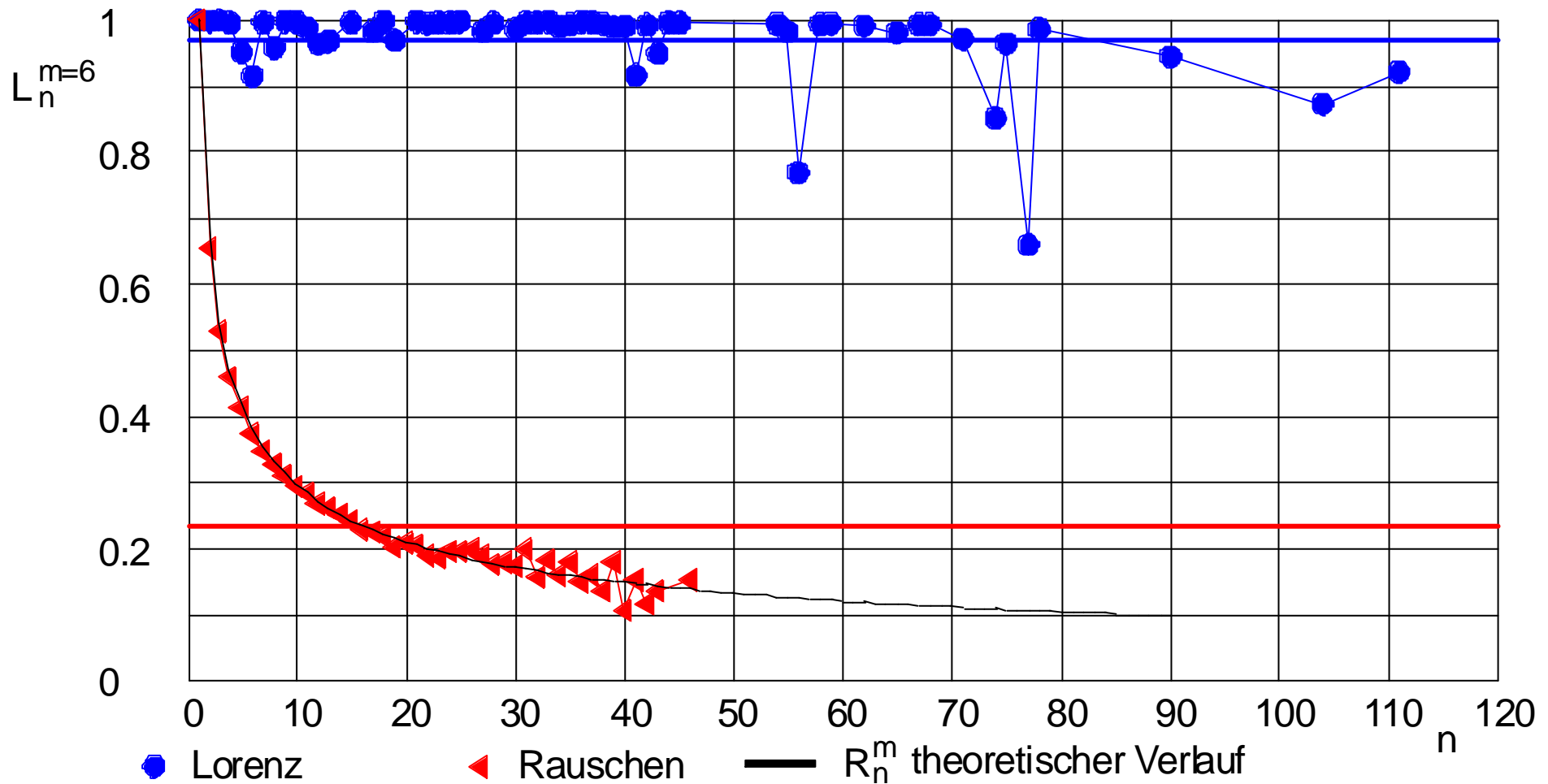
Determinismus / Stochastizität (Kaplan & Glass)

Charakterisierung der Dynamik:

- **Lokaler Fluß im Phasenraum**
- **Ansatz: globaler Mittelwert über alle Hyperkuben**
- Sortierung der Hyperkuben nach jeweiligen n_j -Wert
- betrachte Verteilung der mittleren Trajektorienlänge in Abh. von Anzahl der Passagen

$$L_n^m := \left\langle \left| \mathbf{Y}_{n_j}^j \right| \right\rangle_{n=n_j}$$

Determinismus / Stochastizität (Kaplan & Glass)



$$L := \left\langle L_n^m \right\rangle_{n>1}$$

Lorenz-System $L(m=6) = 0,97$
 weißes Rauschen $L(m=6) = 0,23$

Determinismus / Stochastizität (Kaplan & Glass)

Lorenz-System deterministisch	$L=0,97 < 1$?
weißes Rauschen stochastisch	$L=0,23 > 0$	

Abweichung vom maximalen Wert:

- allg. gilt: $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} L_n^m = 1$
- endliche Datenlänge \rightarrow endliche Hyperkubenanzahl
 \rightarrow endliche Kantenlänge ε
- bei $\varepsilon \rightarrow 0$ Abnahme der Trajektorienpassagen/Hyperkubus
 \rightarrow Verschlechterung der Statistik

Determinismus / Stochastizität (Kaplan & Glass)

Abweichung vom minimalen Wert:

- betrachte Funktionsverlauf von L_n^m für weißes Rauschen:

$$L_n^{fit} := \frac{0,96}{\sqrt{n}} \approx \frac{1}{\sqrt{n}}$$

- funktionaler Verlauf und Vorfaktor ergeben sich aus Summation von Trajektorienvektoren eines *random-walk* in m Dimensionen

(Lord Rayleigh, 1919)

- *random-walk*: n Schritte (Einheitslänge) in m Dimensionen, wobei Winkel von Schritt zu Schritt zufällig gewählt wird

Determinismus / Stochastizität (Kaplan & Glass)

Abweichung vom minimalen Wert:

- betrachte mittlere Änderung pro Schritt ($n \rightarrow \infty$):

$$R_n^m = \sqrt{\frac{2}{nm}} \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \quad \Rightarrow \quad R_n^m = c_m \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$m = \quad 2 \quad \quad 3 \quad \quad 4$$

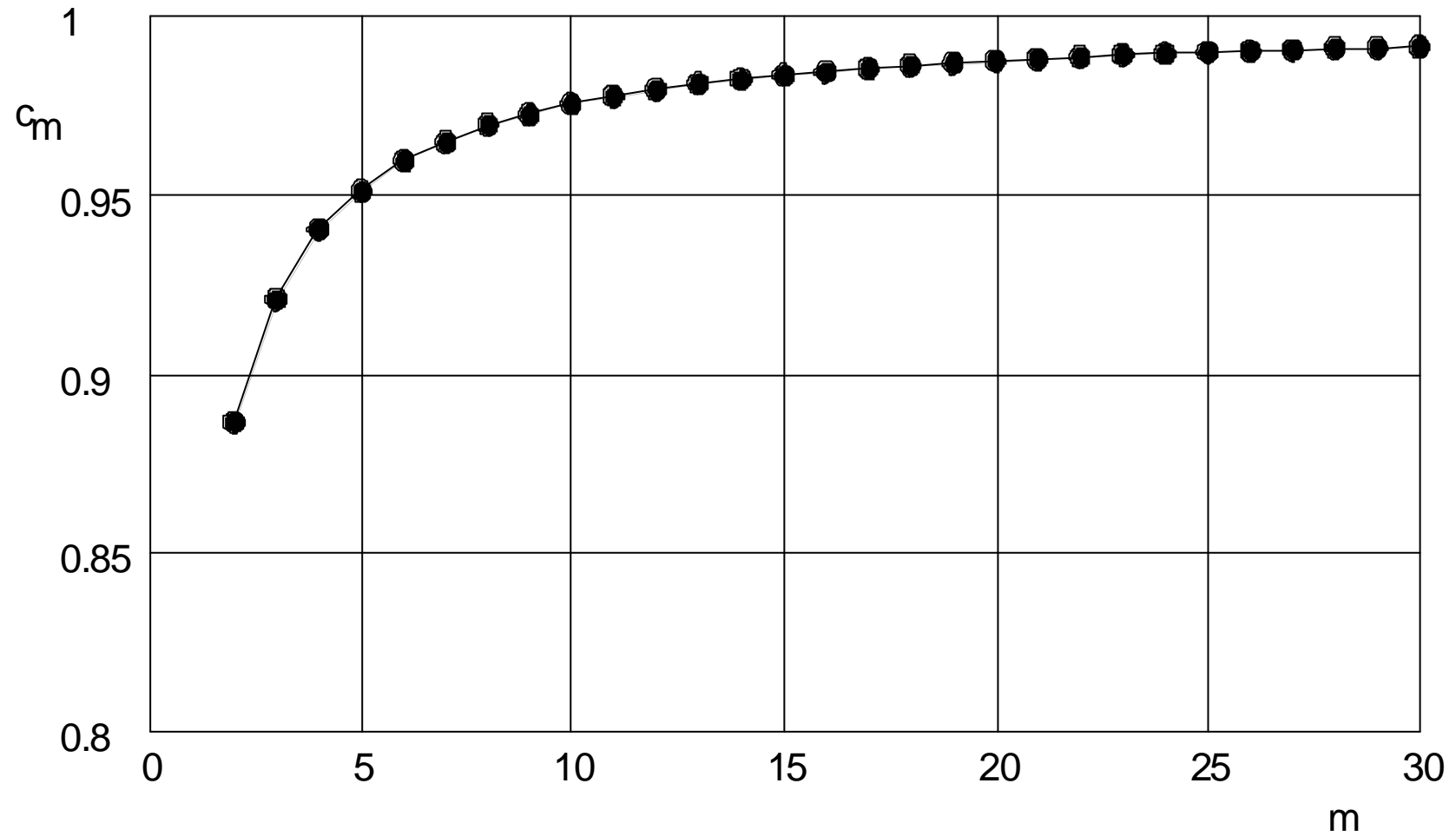
$$c_m = \quad \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \frac{4}{\sqrt{6\pi}} \quad \frac{3\sqrt{\pi}}{\sqrt{32}} \quad \Rightarrow \quad \lim_{m \rightarrow \infty} c_m = 1$$

0,886

0,921

0,939

Determinismus / Stochastizität (Kaplan & Glass)



Determinismus / Stochastizität (Kaplan & Glass)

Renormierung des lokalen Flusses im Phasenraum:

- mit $R_n^m = c_m \frac{1}{\sqrt{n}}$

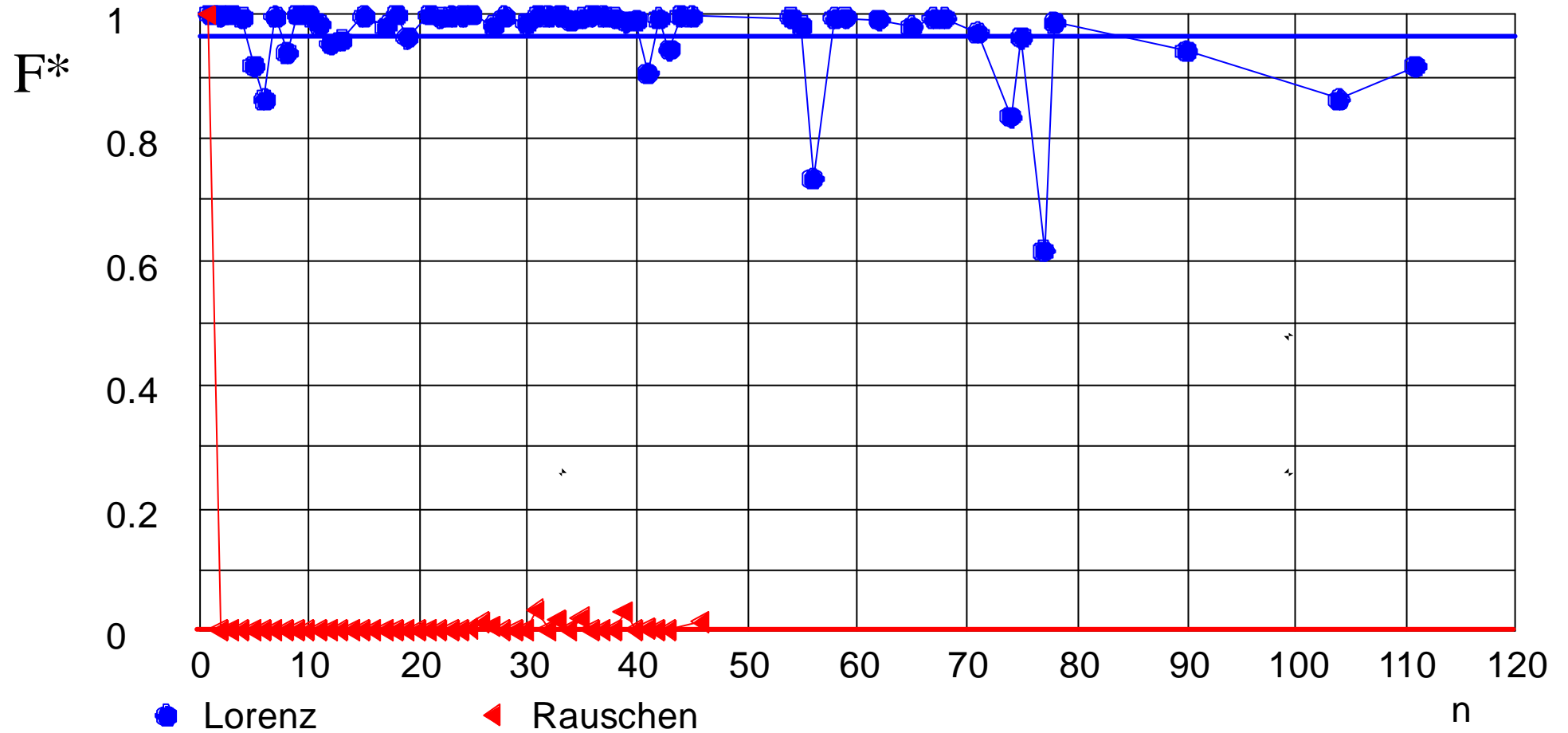
Renormierung: $F^* := \left\langle \frac{L_n^m - R_n^m}{1 - R_n^m} \right\rangle_{n>1}$

$$F^* := 0 \quad \forall L_n^m < R_n^m$$

Lorenz-System	$L(m=6) = 0,97$	$F^* = 0,965$
---------------	-----------------	---------------

weißes Rauschen	$L(m=6) = 0,23$	$F^* \approx 0$
-----------------	-----------------	-----------------

Determinismus / Stochastizität (Kaplan & Glass)



Determinismus / Stochastizität (Wayland et al.)

Wayland et al. Verfahren:

operationale Definition:

eine Zeitreihe $v(t)$ heißt *deterministisch*, wenn eine Folge von Phasenraumvektoren durch die Iteration einer *kontinuierlichen* Funktion f exakt modelliert werden kann (Voraus.: m und τ geeignet gewählt).

Determinismus / Stochastizität (Wayland et al.)

Vorgehensweise:

- Rekonstruktion der Dynamik im Phasenraum

$$\mathbf{v}(t) = (v(t), v(t - \tau), v(t - 2\tau), \dots, v(t - m\tau))$$

- empirischer Test auf Kontinuität (aufgrund endlicher Folge von Phasenraumvektoren)

- Annahme:

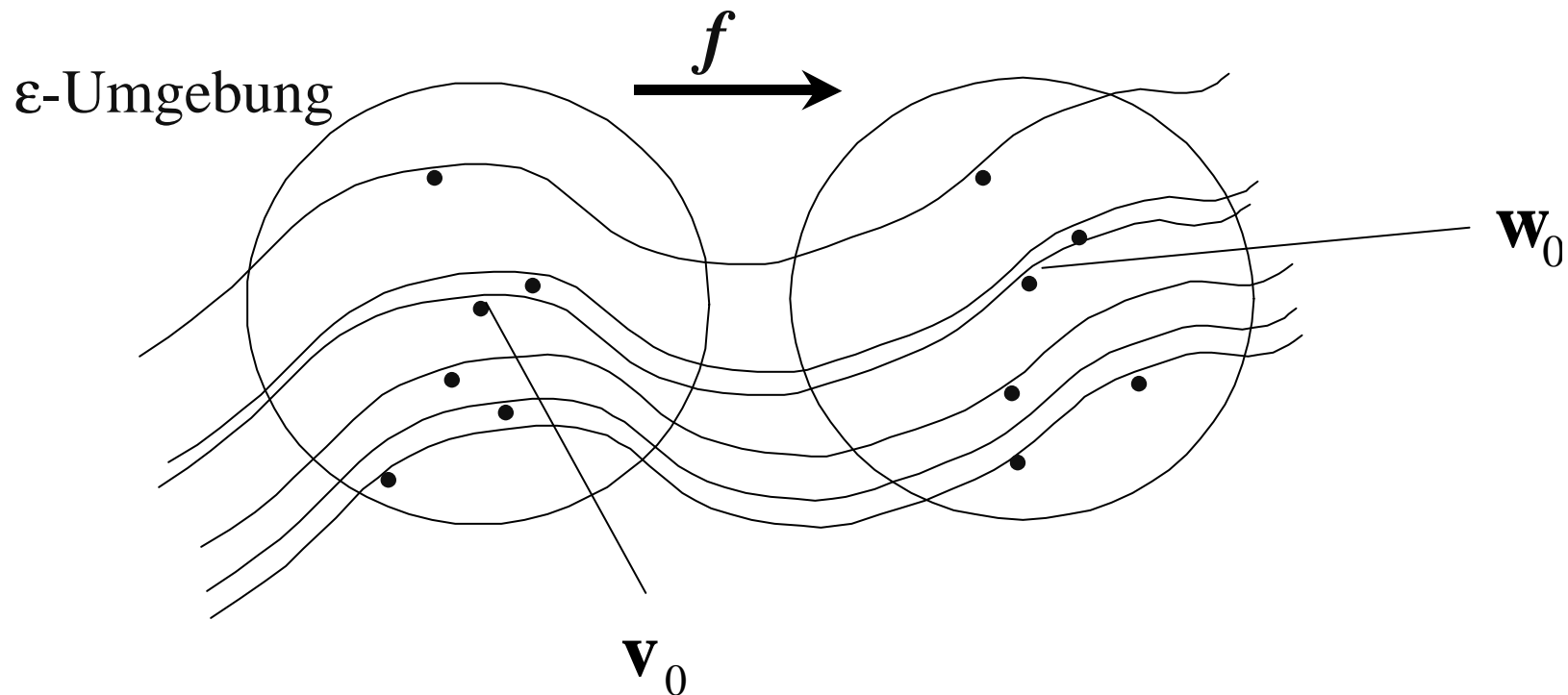
wenn Abbildung f kontinuierlich, dann gilt:

dicht benachbarte Punkte im Phasenraum werden auf dicht benachbarte Punkte abgebildet

Determinismus / Stochastizität (Wayland et al.)

lokale Betrachtung:

- betrachte Punkt auf einem Attraktor \mathbf{v}_0 , seine nächsten Nachbarn $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$, sowie deren Bilder $\mathbf{w}_0, \dots, \mathbf{w}_k$ aufgrund der Wirkung von f



Determinismus / Stochastizität (Wayland et al.)

- wenn Zeitreihe deterministisch und $\mathbf{v}_0, \dots, \mathbf{v}_k$ auf kleines Volumen im m -dimensionalen Phasenraum beschränkt

\Rightarrow Translationsvektoren $\mathbf{t}_j = \mathbf{w}_j - \mathbf{v}_j$ nahezu gleich

sei $\langle \mathbf{t} \rangle = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k \mathbf{t}_j$ Mittelwert der Translationsvektoren

definiere: Translationsfehler
(Varianz) $e_{trans} = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k \frac{\|\mathbf{t}_j - \langle \mathbf{t} \rangle\|^2}{\|\langle \mathbf{t} \rangle\|^2}$

$\|\mathbf{t}\|$ = Euklidische Länge des Vektors \mathbf{t}

Determinismus / Stochastizität (Wayland et al.)

Translationsfehler minimal bei deterministischen Zeitreihen

Erweiterung auf globale Abschätzung:

- wähle N^* Punkte auf einem Attraktor (N^* beliebig)
- bestimme jeweiligen Translationsfehler
- Median der Translationsfehler
→ Maß für Determinismus
- Vorteile des Verfahrens: kleine Datenmengen
geringe Rauschanfälligkeit

Determinismus / Stochastizität (Salvino & Cawley)

Salvino & Cawley Verfahren:

Hypothese:

Stetigkeit im Phasenraum impliziert Determinismus
in Zeitreihe

bisherige Verfahren:

Einheits-Vektorfeld vorausgesetzt

jetzt:

Vektorfeld im Phasenraum beliebig

Determinismus / Stochastizität (Salvino & Cawley)

Vorgehensweise:

- Rekonstruktion der Dynamik im Phasenraum

$$\mathbf{v}(t) = (v(t), v(t - \tau), v(t - 2\tau), \dots, v(t - m\tau))$$

- Test auf Stetigkeit

- Grundannahme 1:

DGL \rightarrow rechte Seite stetige (lokal Lipschitz) Funktion des Ortes

\rightarrow Lösung der DGL eindeutig bestimmt für gegebene

Anfangsbedingungen \rightarrow benachbarte Punkte im Phasenraum

zeigen ähnliche zeitliche Entwicklung

Determinismus / Stochastizität (Salvino & Cawley)

- **Grundannahme 2:**

diskrete Abbildung \rightarrow Definition Stetigkeit nicht eindeutig \rightarrow
jedoch: Stetigkeit \rightarrow Existenz einer Regel, die aus der zeitlichen
Entwicklung der Zustände im Phasenraum abgeleitet werden kann

- **Grundannahme 3:**

betrachte Vektorfeld in \mathbb{R}^d als Funktion des Ortes:

$$\phi = \phi(x) = \Psi(x, f^1(x), \dots, f^{k-1}(x)), \quad k > 1$$

wobei f^i i -te Iteration von f und Ψ stetige Funktion

Determinismus / Stochastizität (Salvino & Cawley)

einfachste Form von $\phi(x)$:

$$\phi(x) = \sum_{r=0}^{k-1} c_r f^r(x), \quad k > 1$$

f beliebig: Fluß oder Abbildung

z.B. $f^0(x(t)) = x(t)$, $f^1(x(t)) = x(t-1)$, usw.

c_r zunächst beliebig, jedoch unabhängig von x

Determinismus / Stochastizität (Salvino & Cawley)

Bestimmung des Vektorfeldes $\phi(x)$:

- wie bei Kaplan-Glass Verfahren auch:
 - grobe Partionierung des Phasenraums (Hyperkuben)
 - mittlerer Trajektorienvektor / Hyperkubus

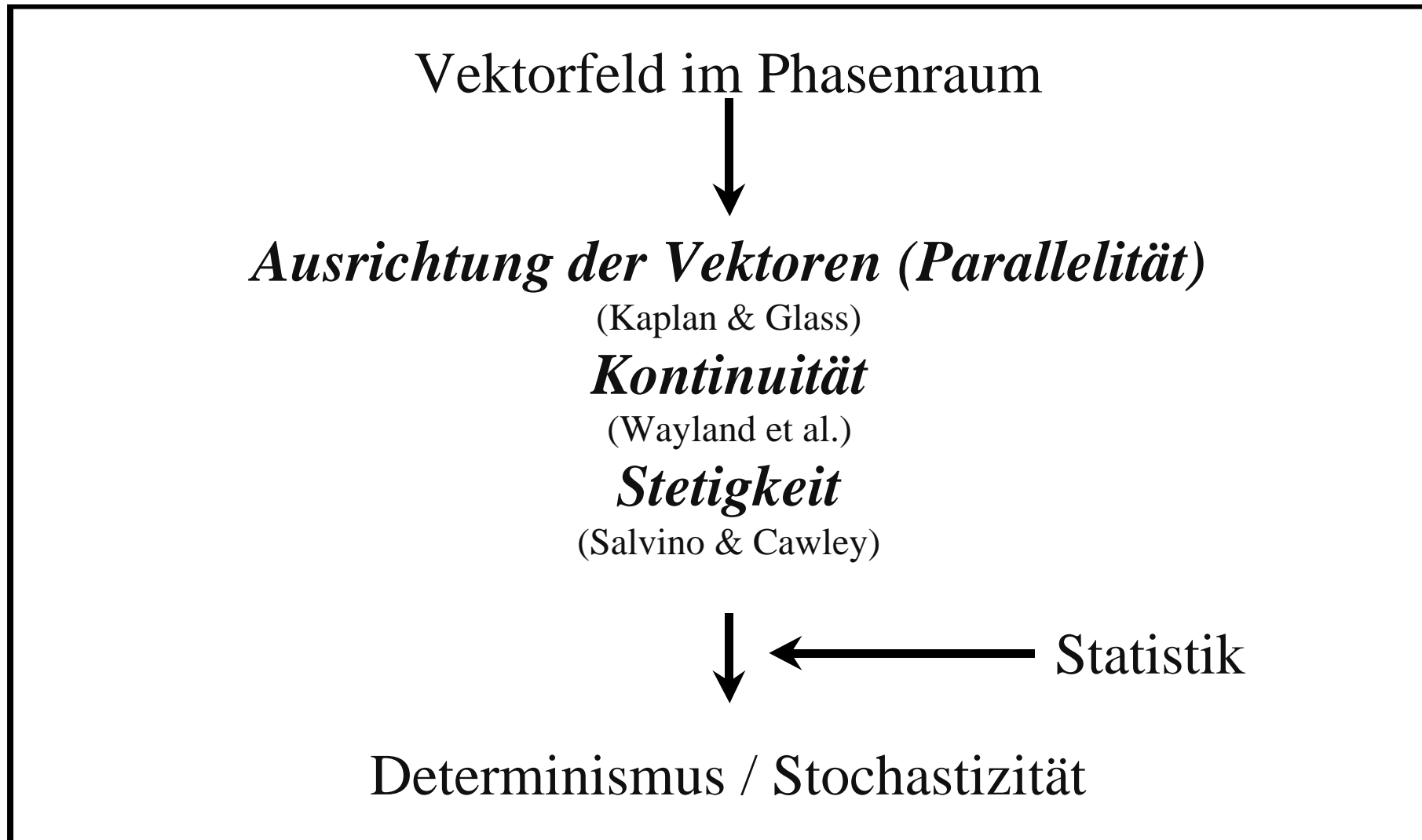
$$Y_{n_j}^j := \frac{\sum_{k=1}^{n_j} v_{k,j}}{n_j}$$

- Statistik (hier gewichteter quadrierter Mittelwert):

$$W = \left\langle n_j \left\| Y_{n_j}^j \right\|^2 \right\rangle$$

Determinismus / Stochastizität

Zusammenfassung:



Determinismus / Stochastizität

Zusammenfassung

- prinzipiell basieren alle Verfahren auf Stetigkeit im Phasenraum

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \quad \text{sofern} \quad |x - x_0| < \delta = \delta(\varepsilon)$$

- Äquivalenz Stetigkeit \Leftrightarrow Determinismus gerechtfertigt ?

- *Ausschlußbeweis:*

Stochastische Dynamik muß sich unter der verwendeten Statistik deutlich anders verhalten.