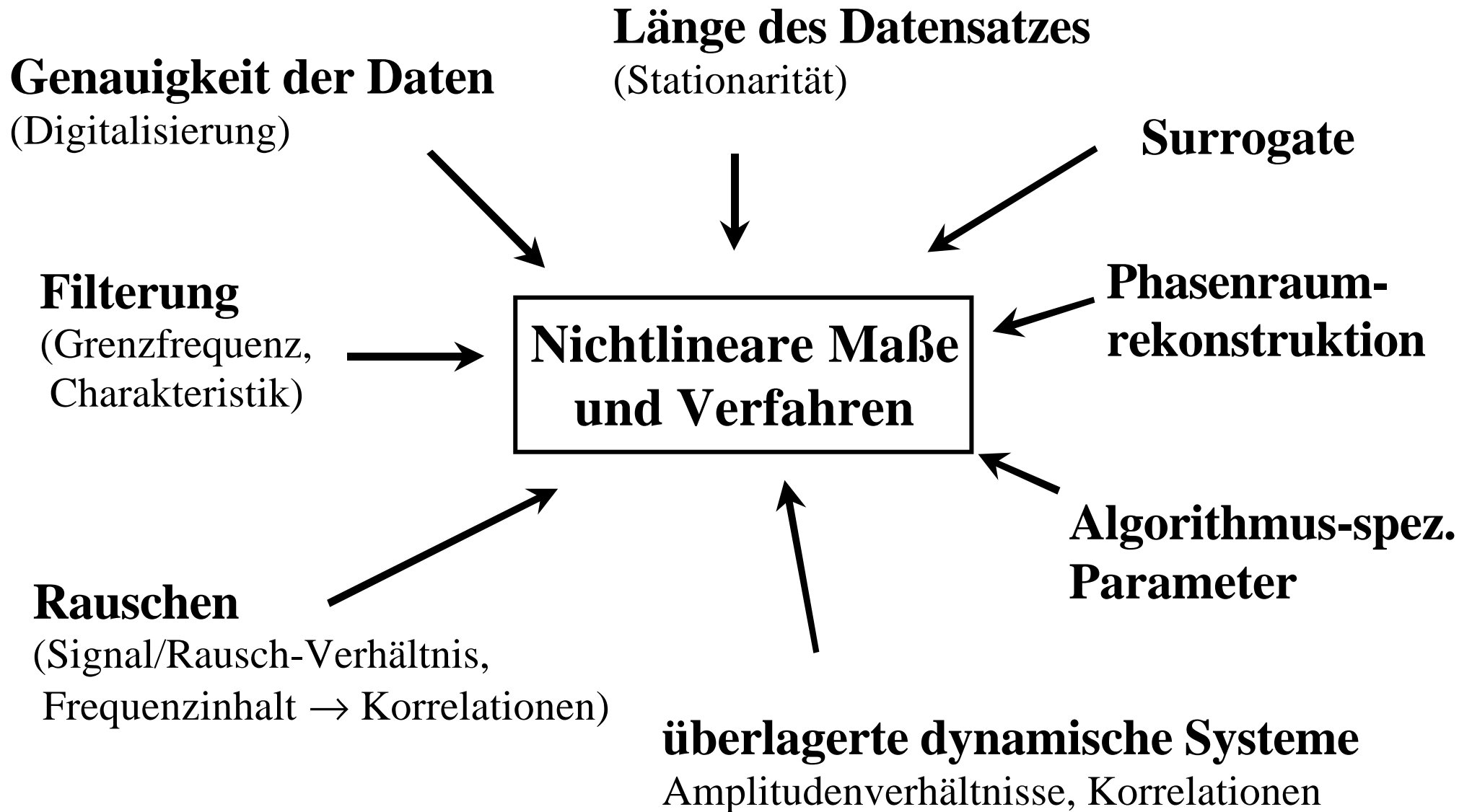


Nichtlineare Zeitreihenanalyse: Beeinflussende Faktoren



- **Verstärker**
- **Abtastintervall**
- **Filter**
- **Analog-Digital Wandler**

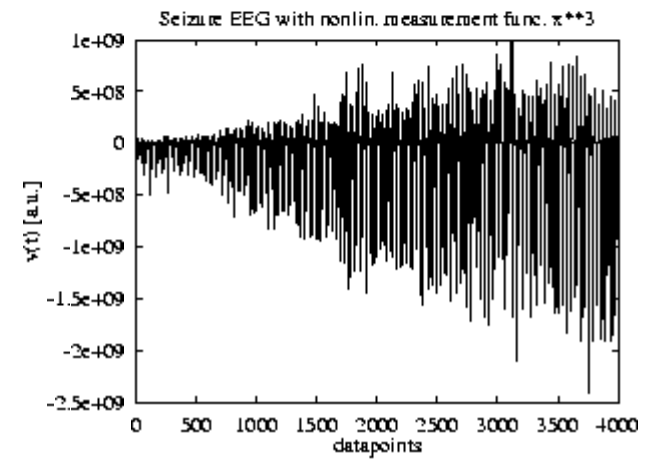
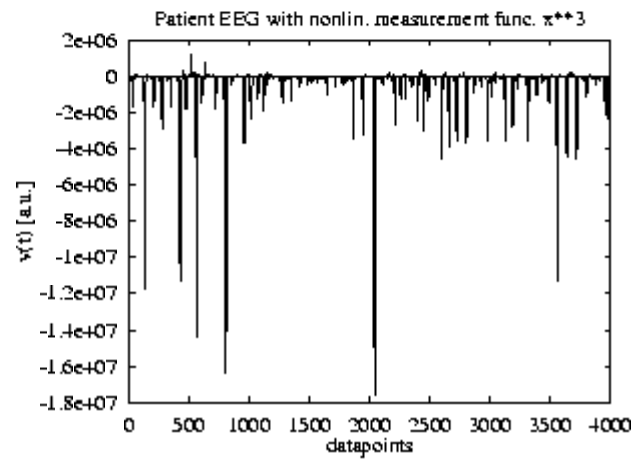
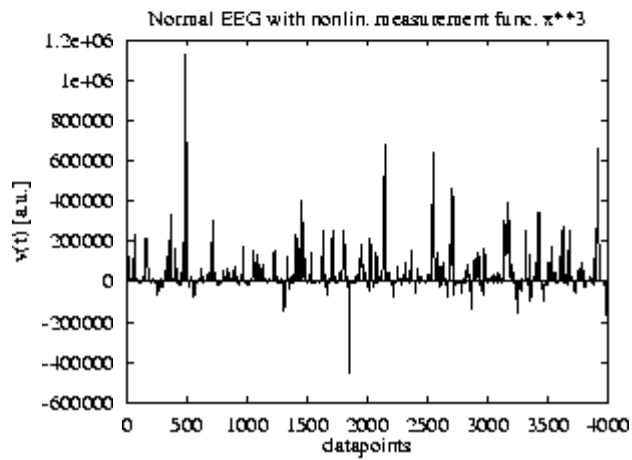
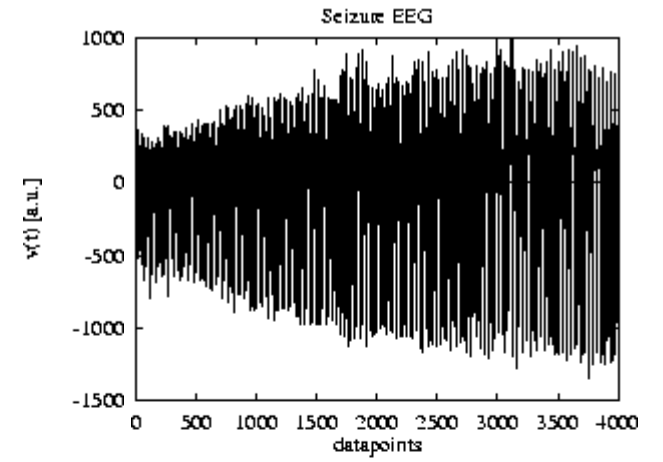
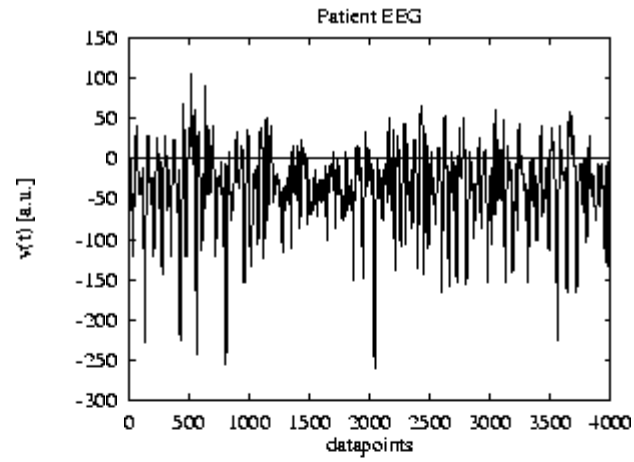
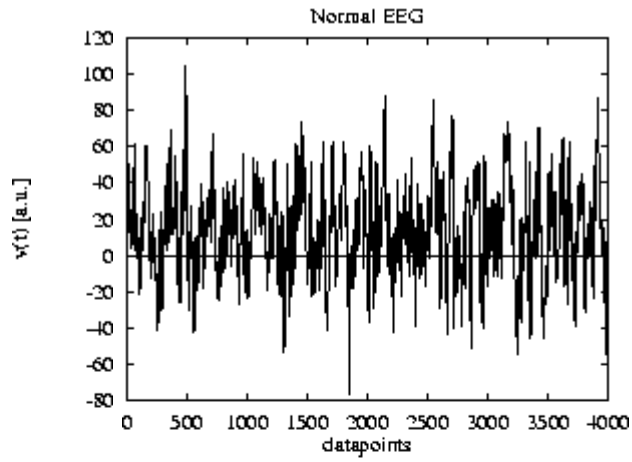
Verstärker

Forderung: Arbeitsbereich an Signal anpassen

- linearer Arbeitsbereich, linearer Frequenzgang
- Vorkehrungen gegen Übersteuerung (trends, shot noise)
- Verstärkerrauschen und -driften

Probleme:

- Verfälschung der Zeitreihe \leftrightarrow Rückschluß auf Dynamik ?
- nichtlineare Meßfunktion \rightarrow statische Nichtlinearität
- gekoppelte dynamische Systeme \leftrightarrow trennbar ?



Abtastintervall ΔT

Forderungen:

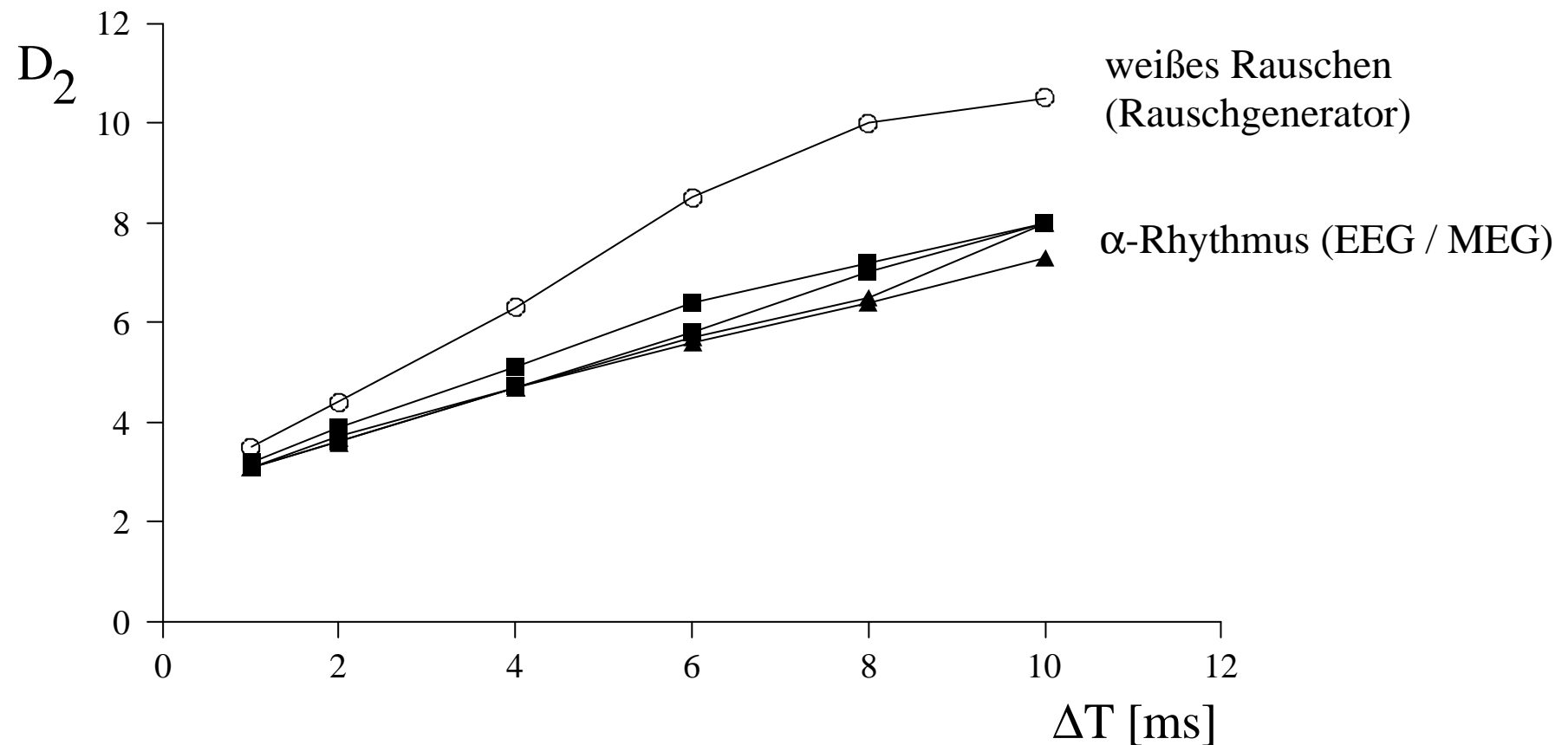
- Abtasttheorem einhalten
- aliasing vermeiden

Probleme: ΔT zu klein ? zu groß ?

- Datenpunktanzahl
- Korrelationen
- Rauschen

- resampling

Abtastintervall ΔT



Originalabtastrate: 1 kHz; Tiefpaß: 200 Hz

Epochenlänge: 30 sec, digitale Filterung: 40 Hz (96 dB/oct.)

Filter

Frequenzgehalt chaotischer Systeme: meist breitbandig

⇒ sinnvoll: **keine** Filterung

(Alternative: phasenraumbasierte nichtlineare Rauschreduktion)

Probleme bei realen Daten:

- Samplingtheorem, aliasing

- Rauschreduktion

(aber ⇒ schmalbandiges Rauschen ⇒ Korrelationen)

Filter

Beispiel: gefilterte Hénon-Abbildung:

(Badii et al., PRL 60, 979, 1988; Mitschke et al., Phys Rev A 37, 4518, 1988)

$$x_{n+1} = 1 - ax_n^2 + y_n$$

$$y_{n+1} = bx_n \quad (a=1,4; \quad b=0,3)$$

$$z_{n+1} = \exp(-\eta)z_n + x_n$$

rekursive Realisation eines single-pole Tiefpaß-Filters (1.Ordnung):

$$\dot{z} = -\eta z + x$$

Measuring filtered chaotic signals

F. Mitschke, M. Möller, and W. Lange

Institut für Quantenoptik, Universität Hannover, D-3000 Hannover 1, Federal Republic of Germany

(Received 16 December 1987)

According to a recent prediction by Badii and Politi [in *Dimensions and Entropies in Chaotic Systems*, edited by G. Mayer-Kress (Springer-Verlag, Berlin, 1986)], low-pass filtering of chaotic signals results in systematic errors in the determination of the attractor dimension. We show that in an experimental situation with the additional complication of small sample sizes of low resolution, the prediction still holds. The entropy K_2 appears to be unaffected by the filtering.

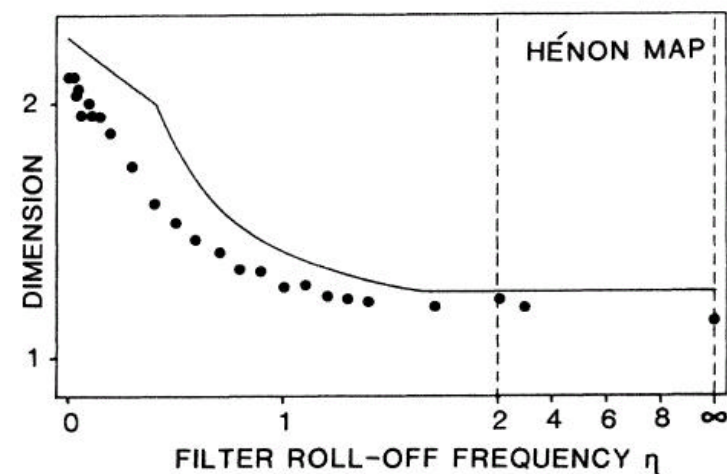


FIG. 1. D_2 values for simulated low-pass filtering with different rolloff frequencies η for the Hénon map. The solid line shows the predicted $D_1(\eta)$. Note change of scale at the dashed lines.

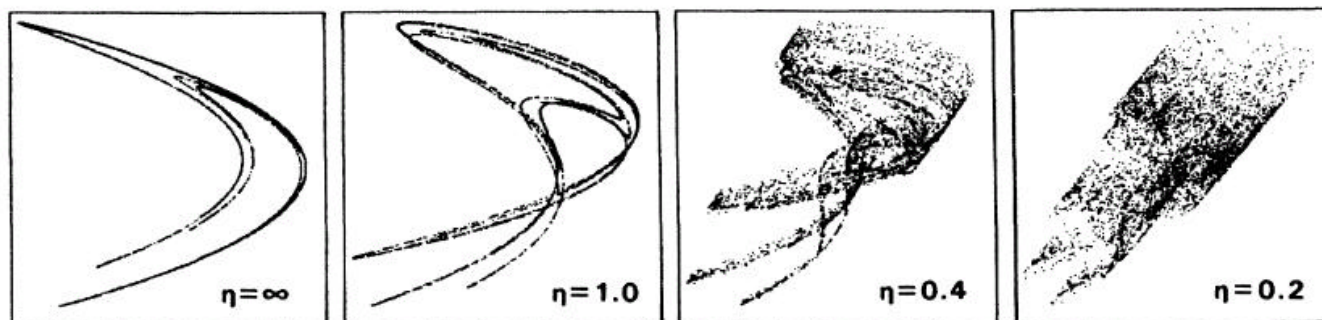


FIG. 3. Influence of degree of filtering on attractor shape. Shown are return maps (Z_{n+1} vs Z_n) of the "filtered Hénon system," Eq. (4), with eight-bit resolution. All four attractors are scaled to the same size.

Filter

Dimensionsanstieg ($d \rightarrow d+1$) durch Tiefpaßfilterung

Interpretation:

- Addition von Systemen (Hénon + Filter)
- Anzahl der Freiheitsgrade des Filters: 1 (passiv, linear)
- durch Systemaddition: zusätzlicher Lyapunov-Exponent

$$\hat{\lambda} = -\eta \quad (\eta \text{ Grenzfrequenz des Filters})$$

- mit Kaplan-Yorke-Vermutung:

$$\text{falls } 0 \geq \eta > \lambda_- \wedge \eta \rightarrow 0 \quad \Rightarrow D_1(\eta = 0) = D_1(\eta = \infty) + 1$$

Filter

- nur Einfluß auf negative Lyapunov-Exponenten

⇒ Dimensionsüberschätzung

aber

⇒ mit Pesin-Identität: (K_1 =Summe der positiven Lyapunov-Exponenten)

kein Einfluß der Filterung auf Entropien

(experimentell bestätigt)

Filter

- Umverteilung von Information auf Zeitachse
jeder kleine Zeitbereich enthält nach Filterung zusätzliche Information über Vergangenheit (*memory effect* des Filters)
- Modifikation der Attraktorgeometrie
Expansion in höherdimensionalen Phasenraum
- Filter kann weder gesamte Information erzeugen noch zerstören
- Rate der Informationsgenerierung **konstant**

Beeinflussende Faktoren

Messtechnik: Filter

dynamisches System



gefilterte Zeitreihe

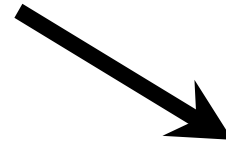


deterministisches Chaos ?



D fraktal

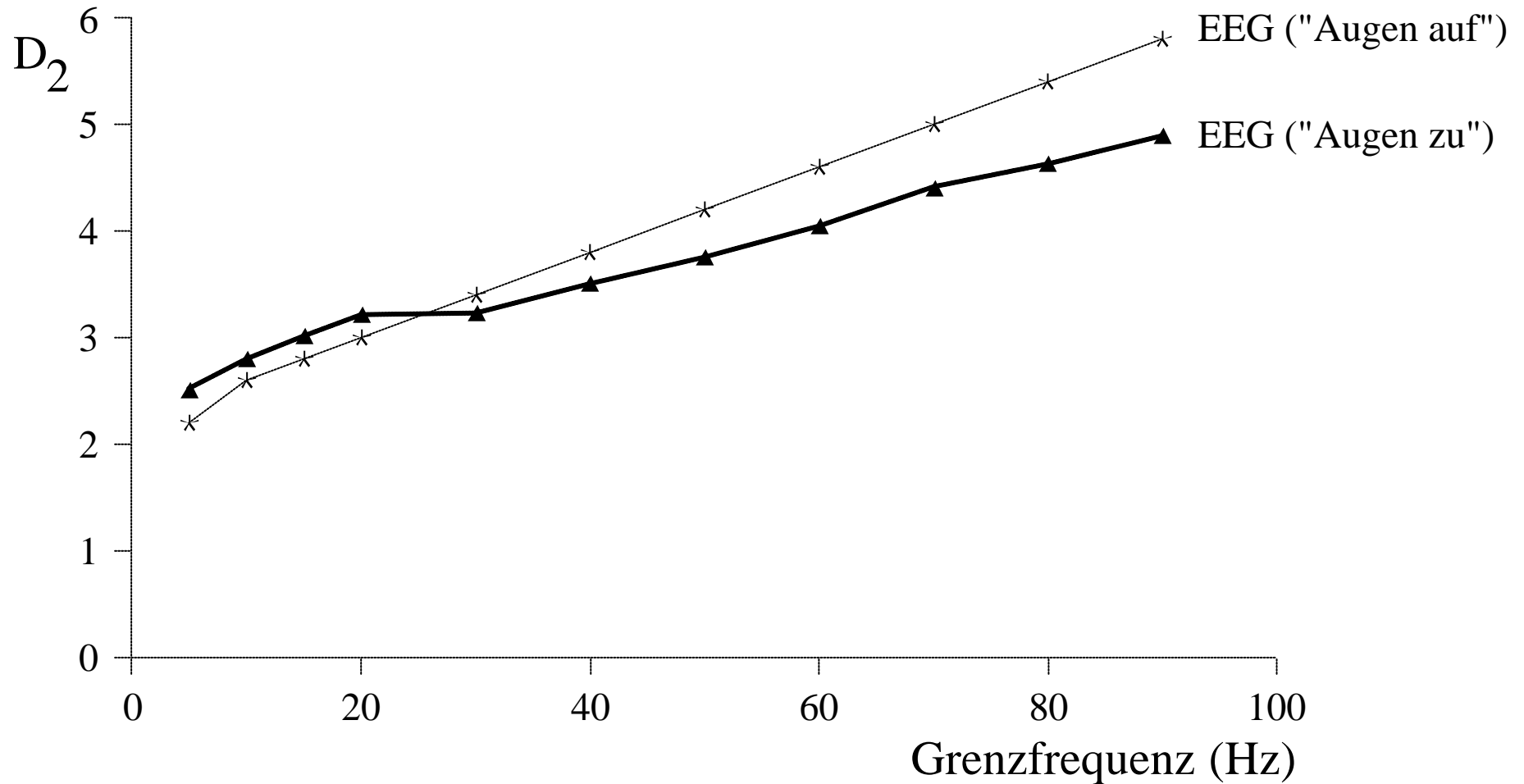
kritisch



besser:

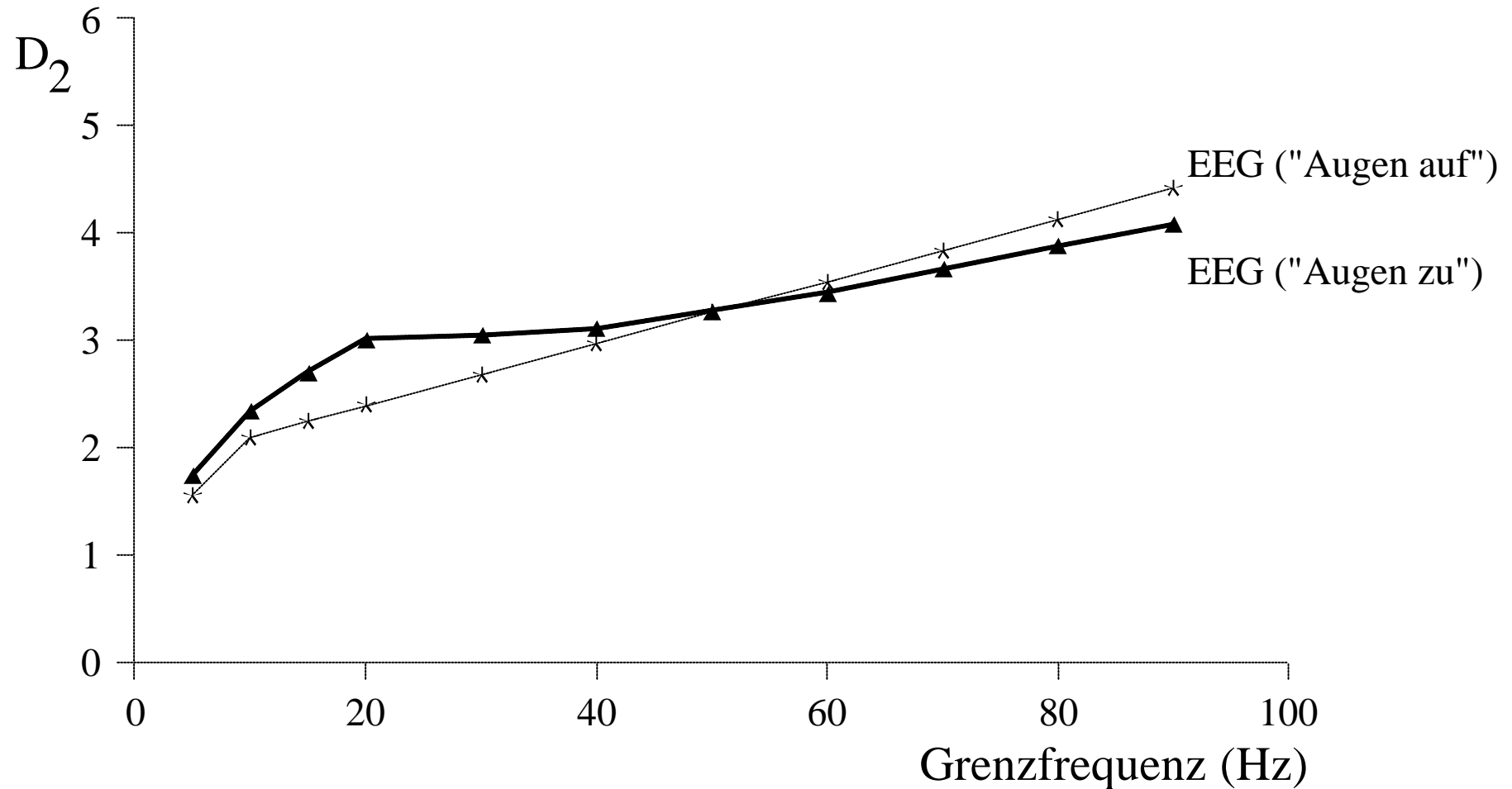
Lyapunov-Spektrum
Entropien

Filter: Butterworth Tiefpaß (12 dB/oct.)



(Abtastrate: 1 kHz; Epochenlänge: 30 sec)

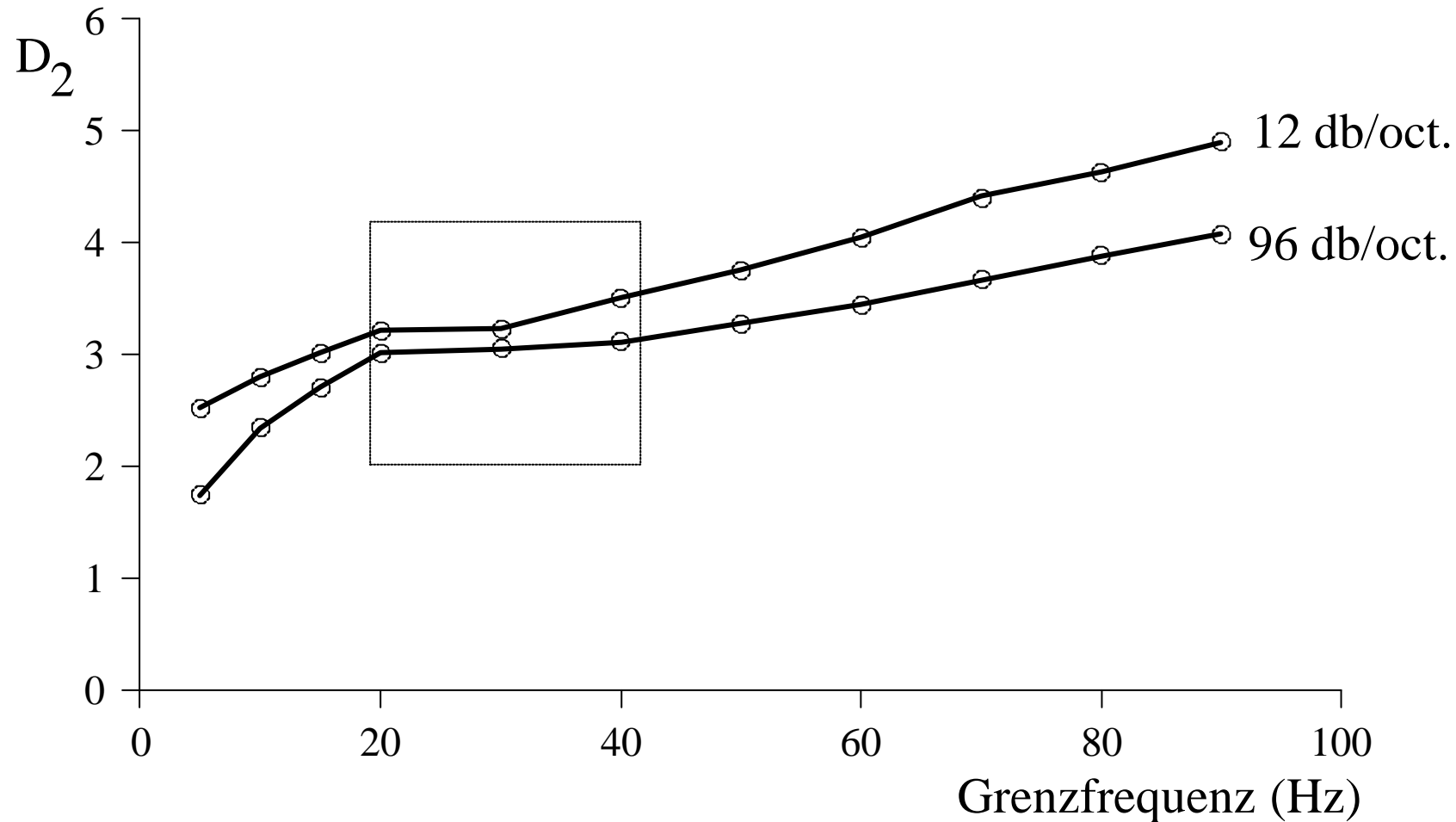
Filter: Butterworth Tiefpaß (96 dB/oct.)



(Abtastrate: 1 kHz; Epochenlänge: 30 sec)

Filter: Butterworth Tiefpaß

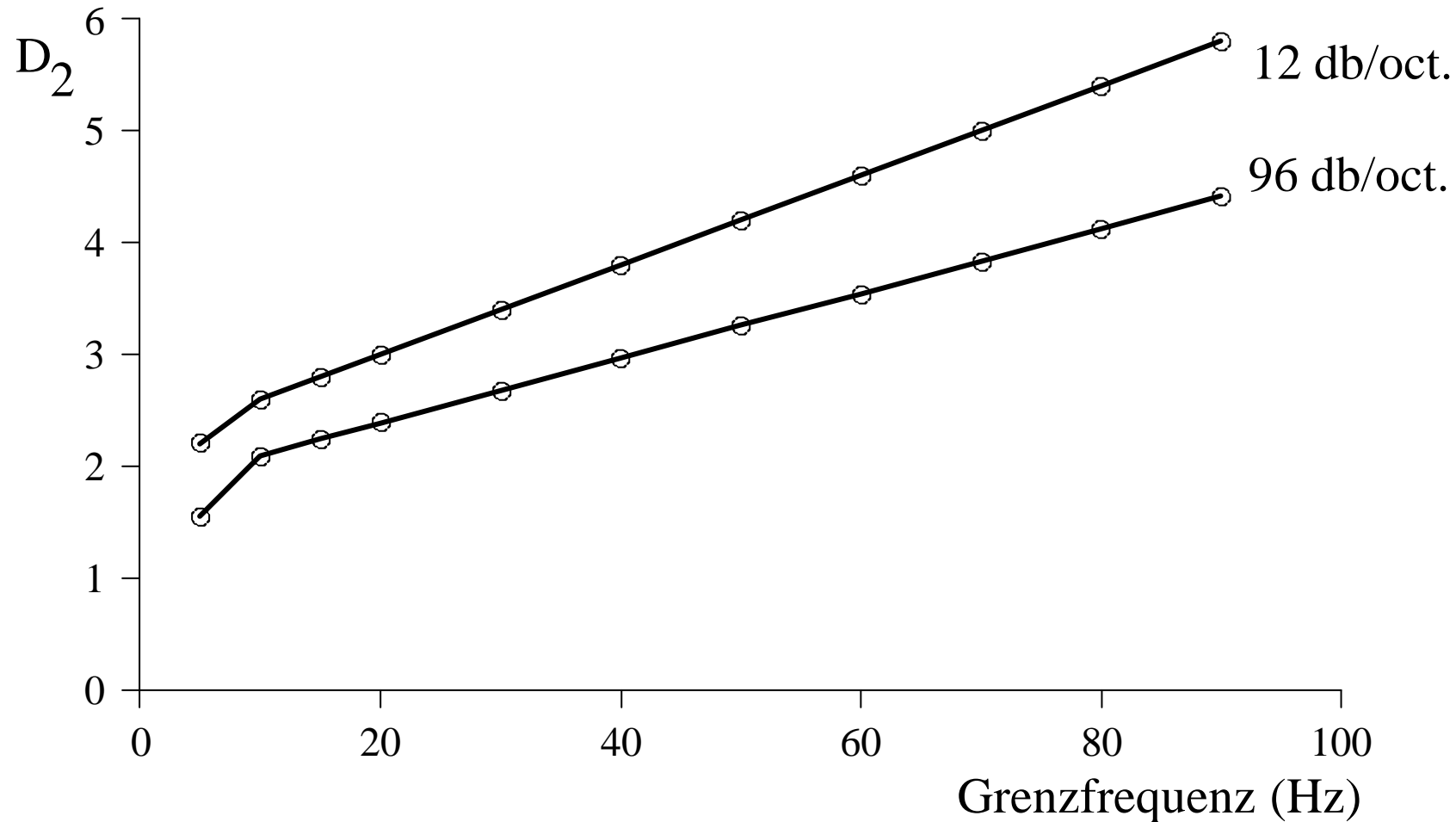
EEG ("Augen zu")



(Abtastrate: 1 kHz; Epochenlänge: 30 sec)

Filter: Butterworth Tiefpaß

EEG ("Augen auf")



(Abtastrate: 1 kHz; Epochenlänge: 30 sec)

Analog-Digital Wandler

- endliche Genauigkeit

- Quantisierungsfehler

(Beispiel: 10 bit ADC

Amplitudenbereich: 0 - 10,24 V

$$\text{Einzelwert } q = \frac{10,24}{2^{10}} = 0,01 \text{ V}$$

$$\text{Quantisierungsfehler } p = (q/2) = 0,005 \text{ V}$$

Analog-Digital Wandler

Möller et al., 1989

- 16 - 32 bit Rechner
- ADC: 8 - 10 bit

heute (1999):

- 64 bit Rechner
- ADC: 24 - 32 bit

Simulation (Möller et al., Phys Lett A 138, 176, 1989):

- Hénon, Rössler, Lorenz, 3- und 5-Torus
- 20.000 Datenpunkte
- Genauigkeit: 32 bit
- Abrunden auf verschiedene Genauigkeiten
- Berechnung der Korrelationssumme (max. Norm)
- Abschätzung der Korrelationsdimension: least-squares fit

Analog-Digital Wandler

Abhängigkeit der Korrelationsdimension von Datengenauigkeit:

$$D_2^{meas.} = D_2^{true} (1 - kp / \bar{\epsilon})$$

$$\bar{\epsilon} \equiv \sqrt{\epsilon_{\min} \epsilon_{\max}} \quad \text{mittlere Länge der Skalierungsregion}$$

$$k \approx 1$$

p = Quantisierungsfehler

Analog-Digital Wandler

Digitalisierung:

- Clusterung der Daten an den Kanten der Hyperkuben
- Seitenlänge der Hyperkuben: $q = 2p$ (least significant digit)

- Abstand zwischen Phasenraumvektoren: Vielfaches von $2p$
- Berechnung der Korrelationssumme bei Vielfachen von $2p$
- Abstände zwischen Phasenraumvektoren: nächstes ganzzahliges Vielfaches von $2p$ über oder unter dem wahren Wert

- Korrelationssumme ist kumulativ:
 - richtiges Zählen von Abständen *größer oder gleich* dem ganzzahligen Vielfachen von $2p$
 - falsche Erhöhung der Korrelationssumme durch ganzzahlige Vielfache von $2p$ *unter* dem wahren Wert

Analog-Digital Wandler

Möglichkeiten der Fehlerminimierung:

- Addition von Rauschen vor der Digitalisierung
(pre-whitening, dithering, bleaching)
- Effektgröße bei schmalbandigen Signalen $\approx 80\%$
(z.B. Lorenz)
- kein Effekt bei breitbandigen Signalen (z.B. Hénon)
- Caveat: Rauschen kann zu Dimensionserhöhung führen !!
(abh. von Signal-Rausch-Verhältnis)

Wiederholung:

- bleibt ein Systemverhalten auf einem bestimmten Bereich des Phasenraums beschränkt, so heißt dieser Bereich *Attraktor*
- *Grenzmenge aller Lösungskurven* der dynamischen Gleichungen eines Systems
- *stationäre* Dynamik: Bewegung *auf* einem Attraktor
- *transiente* Dynamik: Anfangsbedingung liegt *im Einzugsgebiet* eines Attraktors
- *seltsamer Attraktor:*
sensitive Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen

Beeinflussende Faktoren

Attraktor

Existenz eines (seltsamen) Attraktors

einer unbekanntener Dynamik

nachweisbar ?

Existenz eines Attraktors bei unbekannter Dynamik

- Nachweis im strengen Sinne i.A. schwierig / unmöglich
- Hinweise:
 - zeitverzögerte Darstellung (2 oder 3-dimensional)
 - Poincaré - Abbildung
betrachte Trajektorienverläufe, die eine geeignete, den Phasenraum zerteilende Hyperfläche, in einer Richtung schneiden

$$\varphi: R^m \rightarrow R^{m-1}$$

- Existenz wird meist stillschweigend vorausgesetzt

Poincaré-Abbildung:

- erlaubt erste quantitative Analysen
 - Dimension der resultierenden Menge: $D_0 - 1$
 - einfaches Beispiel: *periodisch getriebene Systeme*
 - *natürliche* geeignete Hyperfläche: Fläche konstanter Phase
 - konstanter zeitlicher Abstand zwischen aufeinanderfolgenden Schnitten der Hyperfläche
- stroboskopische Abbildung

Wiederholung: **Takens Theorem**

$$\mathbf{v}(t) = (v(t), v(t - \tau), v(t - 2\tau), \dots, v(t - (m-1)\tau))$$

mit $\tau =$ Zeitverzögerung, $m =$ Einbettungsdimension und $t \rightarrow \infty$

$t \rightarrow \infty$ bei Messdaten unmöglich

\Rightarrow Datenpunktanzahl N möglichst groß

beachte: Anzahl der delay-Vektoren nur $N - (m-1)\tau$

Mindestanforderung: Einbettungsparameter m und τ geeignet wählen

Beeinflussende Faktoren

Phasenraumrekonstruktion

Wahl der Verzögerungszeit τ und der Einbettungsdimension m

optimale Zeitverzögerung



Attraktorstruktur entfaltet

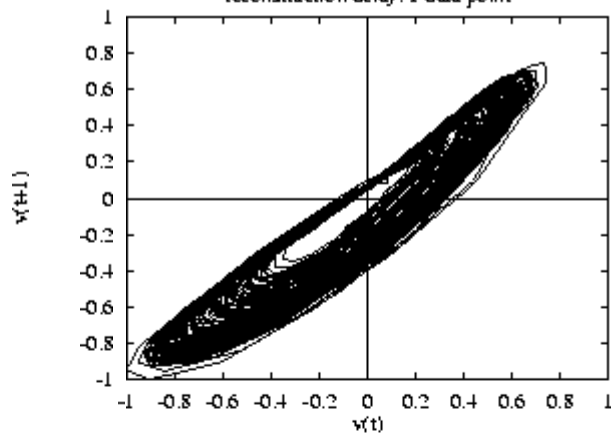
optimale Einbettungsdimension



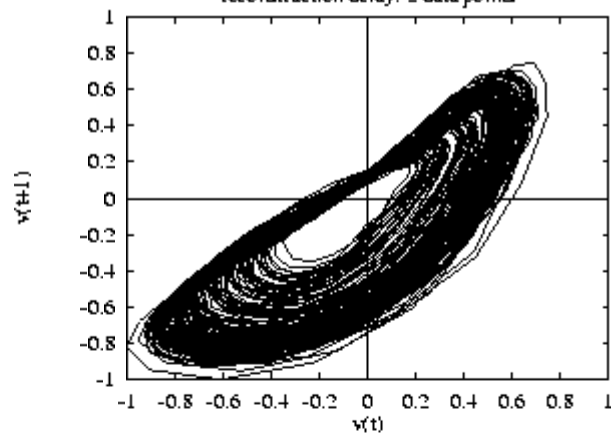
Theoreme von Whitney und Sauer et al.

$$m = m_{opt} \Rightarrow \tau \text{ beliebig}$$

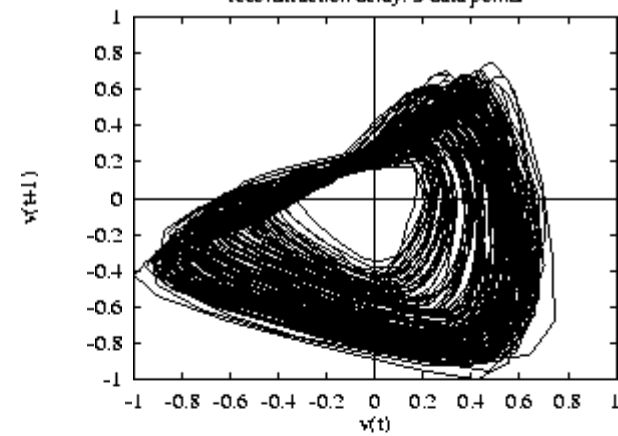
reconstruction delay: 1 data point



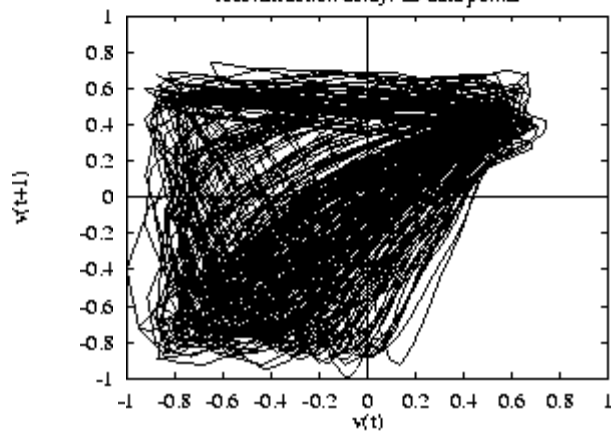
reconstruction delay: 2 data points



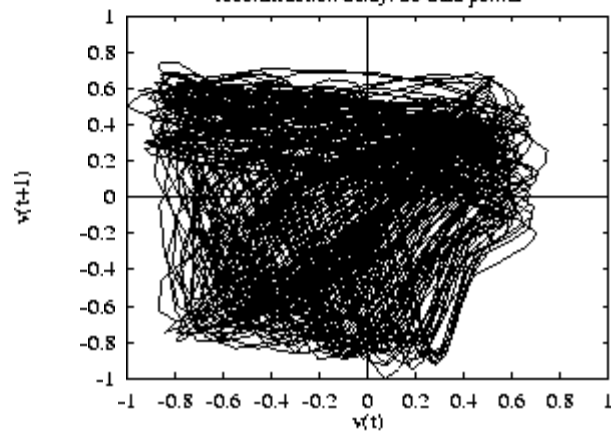
reconstruction delay: 5 data points



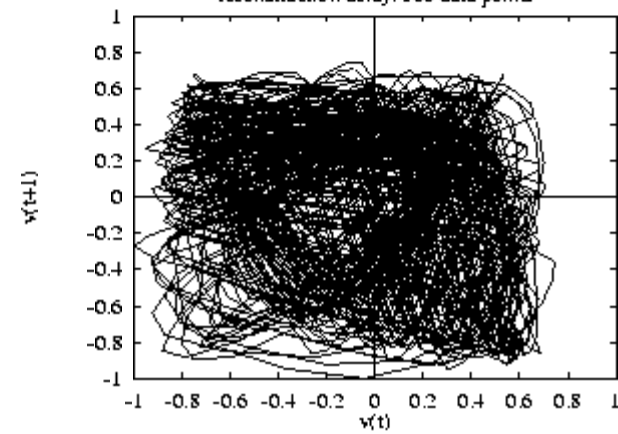
reconstruction delay: 25 data points



reconstruction delay: 50 data points



reconstruction delay: 100 data points



Beeinflussende Faktoren

Phasenraumrekonstruktion

τ -Abschätzung (Alternative: Rekonstruktionsfenster $\tau_w = \tau(m-1)$):

Redundanz

τ zu klein, kein Informationsgewinn
zwischen aufeinanderfolgenden
Delay-Koordinaten, Stauchung entlang
Hauptdiagonale



Irrelevanz

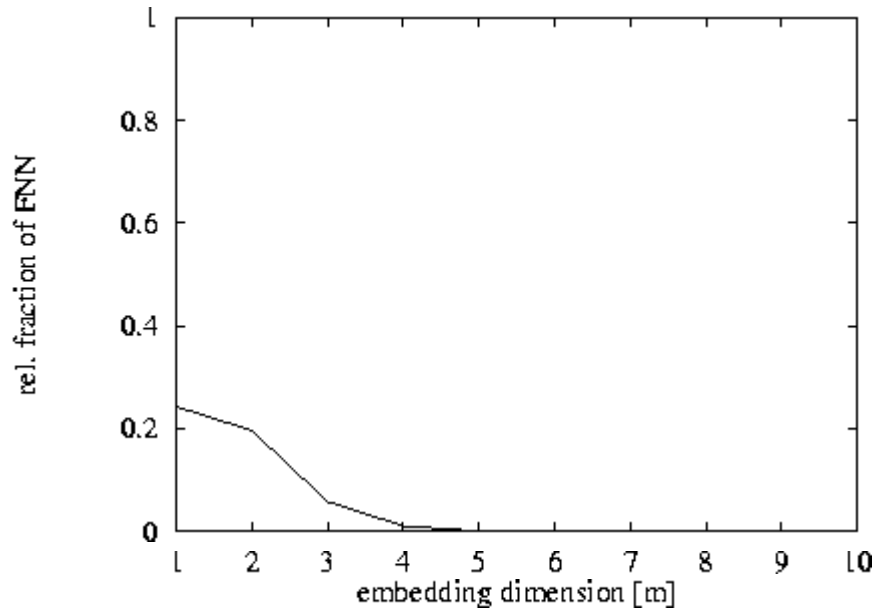
τ zu groß, kein Kausalzusammenhang
zwischen Delay-Koordinaten,
Rekonstruktion repräsentiert nicht
"wahre" Dynamik

- visuelle Inspektion der zeitverzögerten Darstellung mit verschiedenen τ
- 1. Nulldurchgang Autokorrelationsfunktion
- Minimum der Mutual-Information
- Korrelationen höherer Ordnung
- Füllfaktor
- Waberprodukt
- Minimierung des Rekonstruktionsfehlers

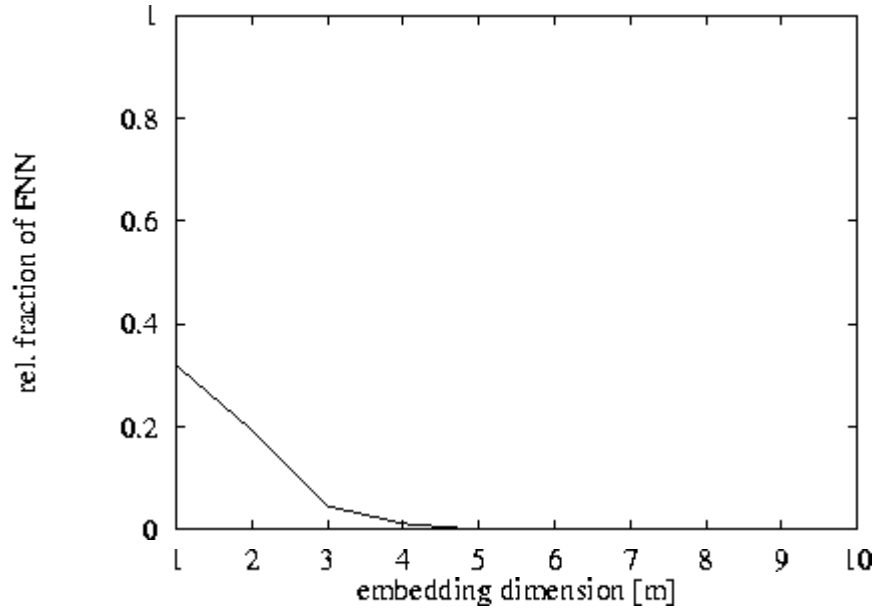
m-Abschätzung:

- *false neighbors* Statistik
- Eigenwertzerlegung
(principal component analysis,
empirische orthogonale Funktionen,
Karhunen-Loéve Dekomposition)
- *m* sukzessive erhöhen

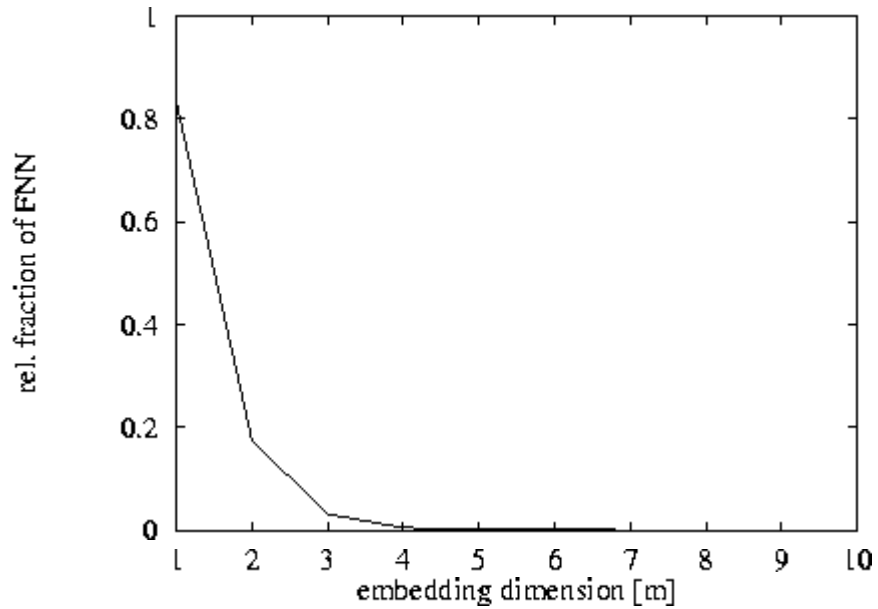
Normal EEG

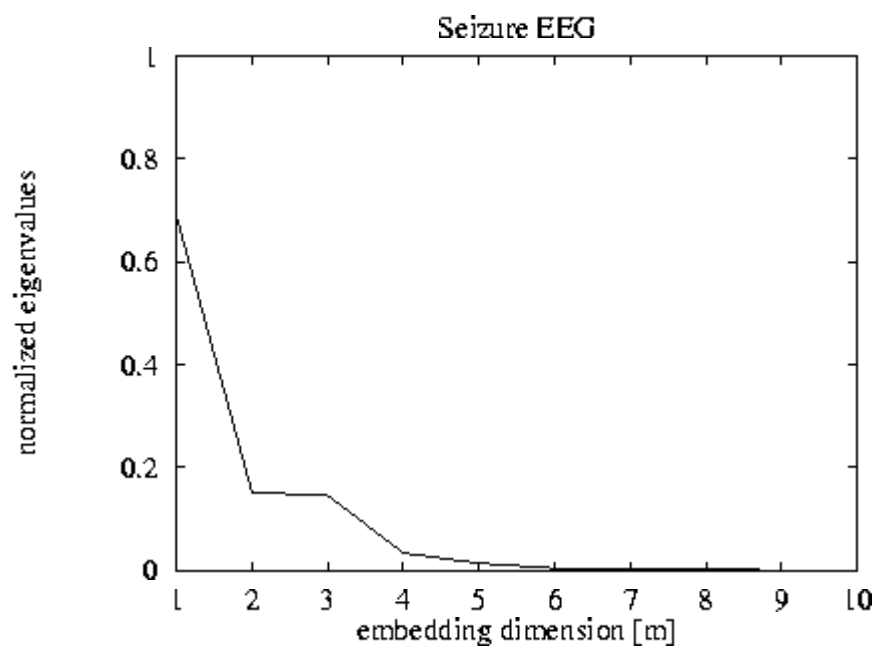
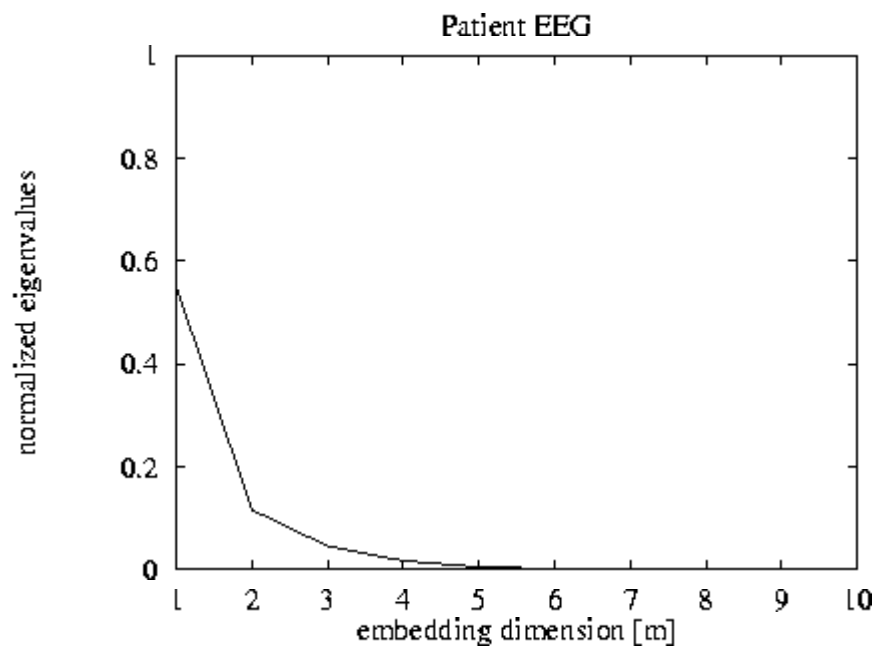
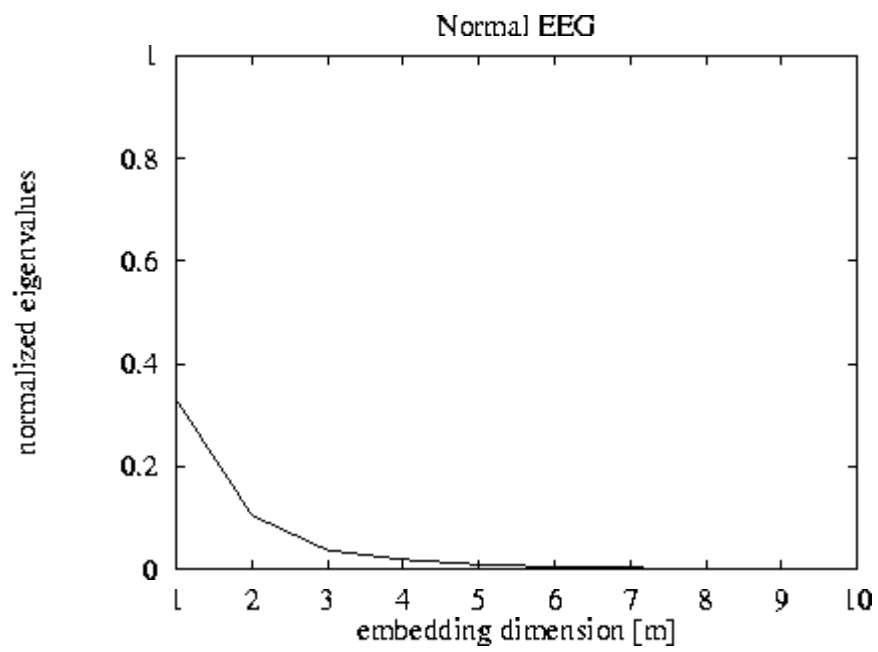


Patient EEG



Seizure EEG

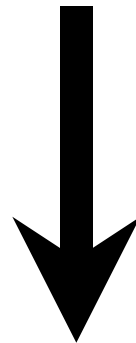




Beeinflussende Faktoren

Phasenraumrekonstruktion

*Zeitverzögerung und Einbettungsdimension
nicht unabhängig voneinander wählbar*



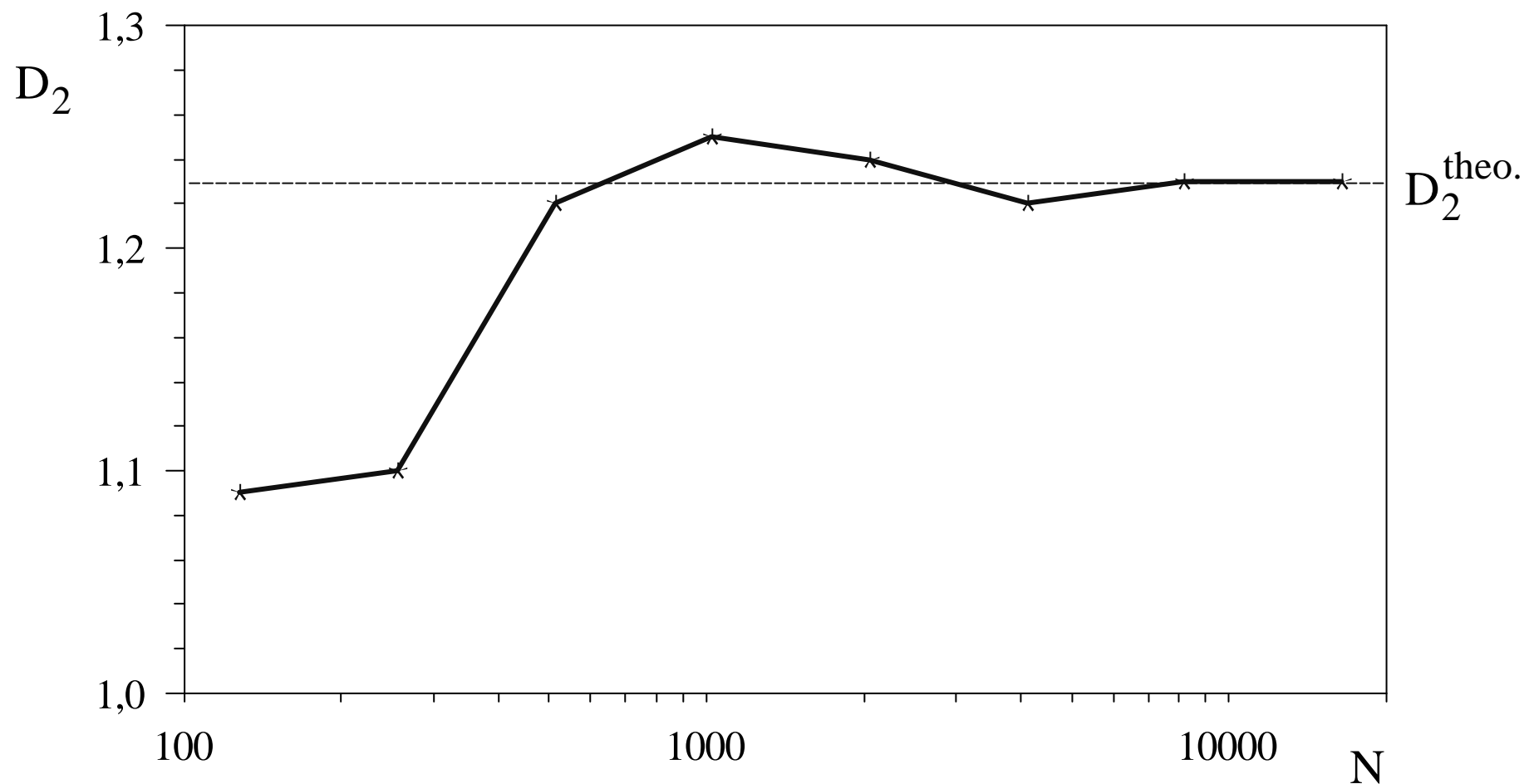
*"optimale" Wahl
abhängig von spezieller Anwendung*

- **wünschenswert:** $N \rightarrow \infty$
- **ausreichende Statistik:**
Besetzungsdichte des Attraktors, Rauschen
- **Probleme:**
 - **endliche Meßzeit**
 - **Abtastintervall**
 - **Stationarität**

Beeinflussende Faktoren

Datenpunktzahl

Hénon-Abbildung (a=1,4; b=0,3)



erste Abschätzungen:

$$N \approx 10^{D_2} \quad (\text{Albano et al., 1987})$$

$$N \approx 42^{D_2} \quad (\text{Smith, 1988})$$

$$N \approx 128^{D_0} \quad (\text{Procaccia, 1989})$$

- Es gibt keine universell gültige Datenpunktanzahl
- Auflösbarkeit der Attraktorstruktur abh. von Verteilung der Punkte auf einem Attraktor

Ruelle Kriterium (1990)

Abschätzung der Korrelationsdimension:

Forderung: mindestens eine ε -Dekade (ausreichende Statistik)

$N(\varepsilon)$: Paare von Phasenraumvektoren (i, j) mit $|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| \leq \varepsilon$

Steigung: $(\log_{10} N(\varepsilon') - \log_{10} N(\varepsilon'')) / (\log_{10} \varepsilon' - \log_{10} \varepsilon'')$

mit

$$\varepsilon_{\min} \leq \varepsilon' < \varepsilon'' \leq \varepsilon_{\max}$$

Ruelle Kriterium (1990)

betrachte Grenzwerte von $N(\varepsilon)$:

$$N(\varepsilon') \geq 1$$

$$N(\varepsilon'') \leq \frac{N(N-1)}{2} < N^2$$

$$\Rightarrow \log_{10} N(\varepsilon'') - \log_{10} N(\varepsilon') \leq \log_{10} N^2$$

mit $\varepsilon'' \geq 10\varepsilon'$

$$\Rightarrow \log_{10} \varepsilon'' - \log_{10} \varepsilon' \geq \log_{10} 10$$

$$\Rightarrow \text{Steigung} \approx D_2 \leq 2 \log_{10} N \quad (\text{allg: } D_2 \leq 2 \log_a N)$$

Beeinflussende Faktoren

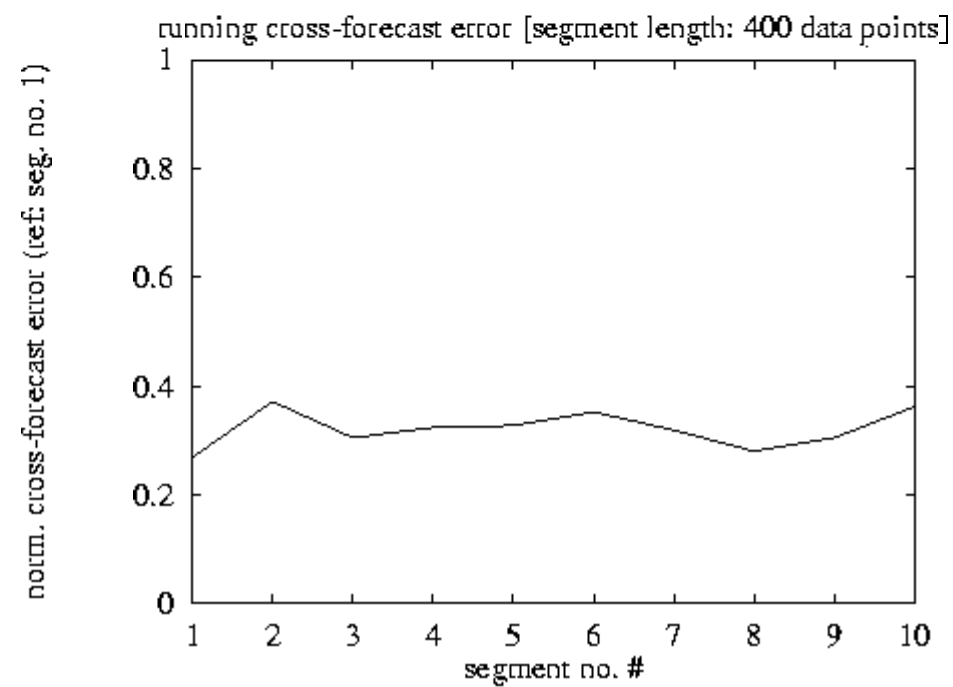
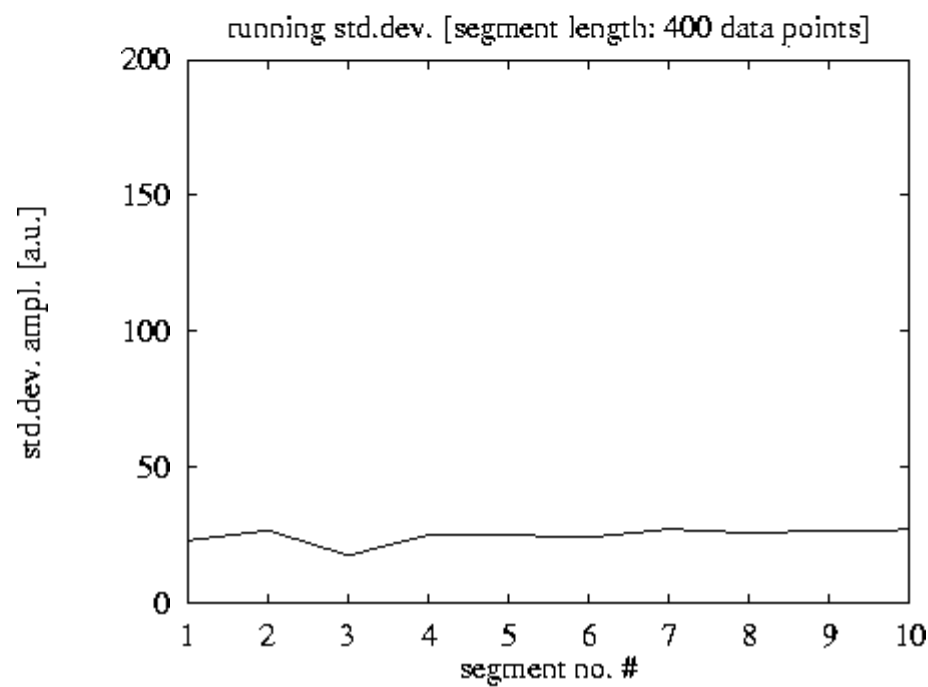
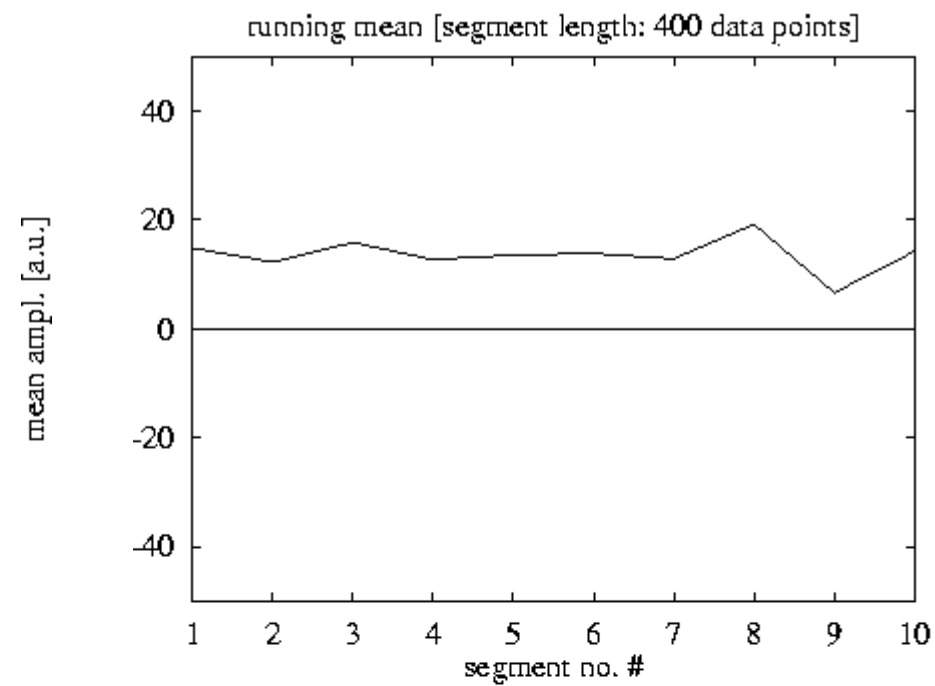
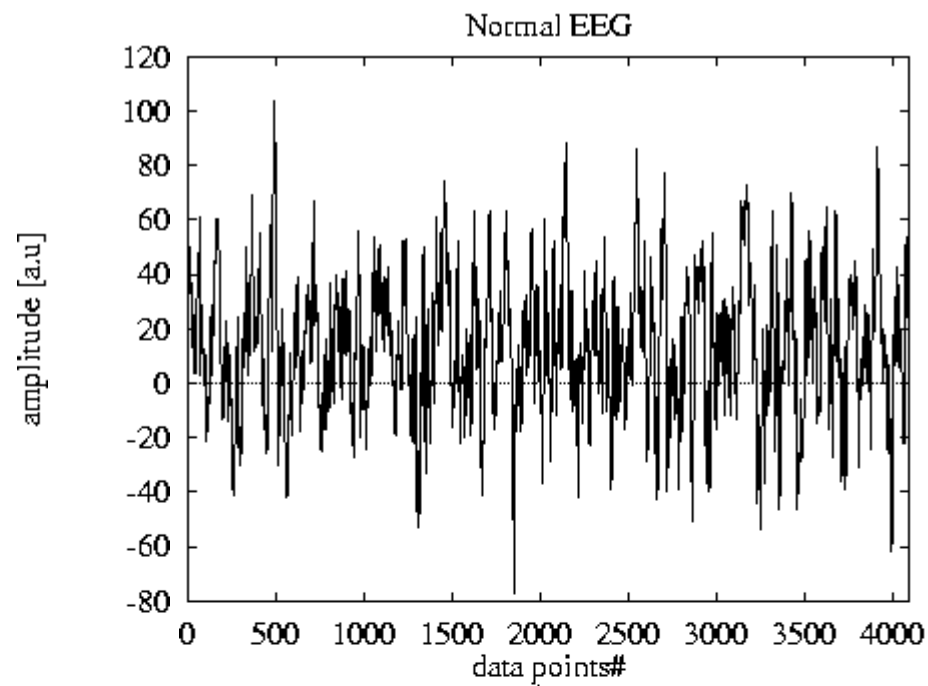
Datenpunktanzahl

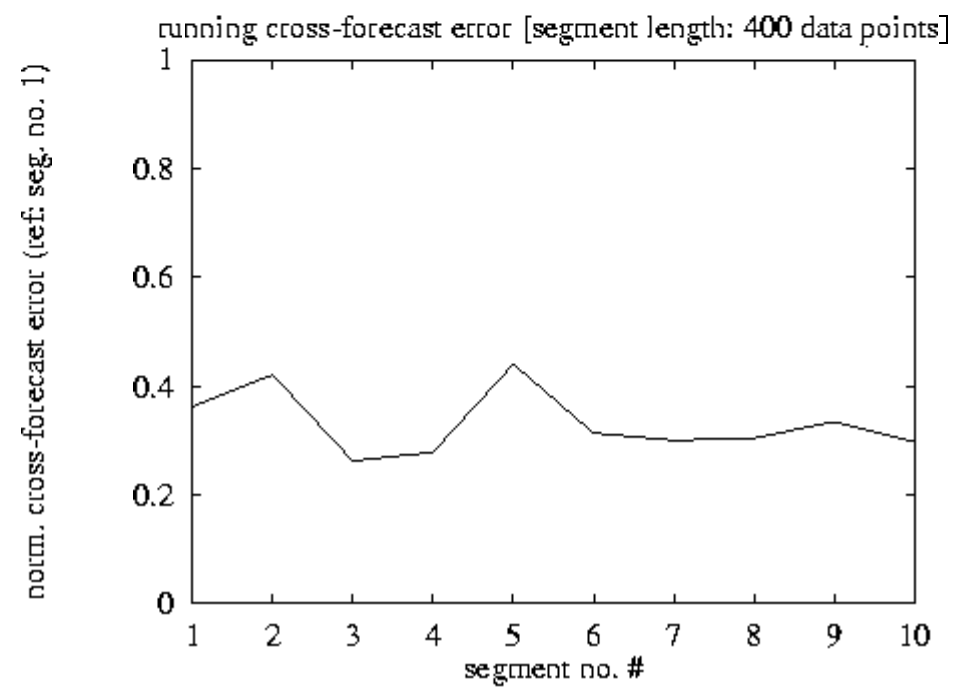
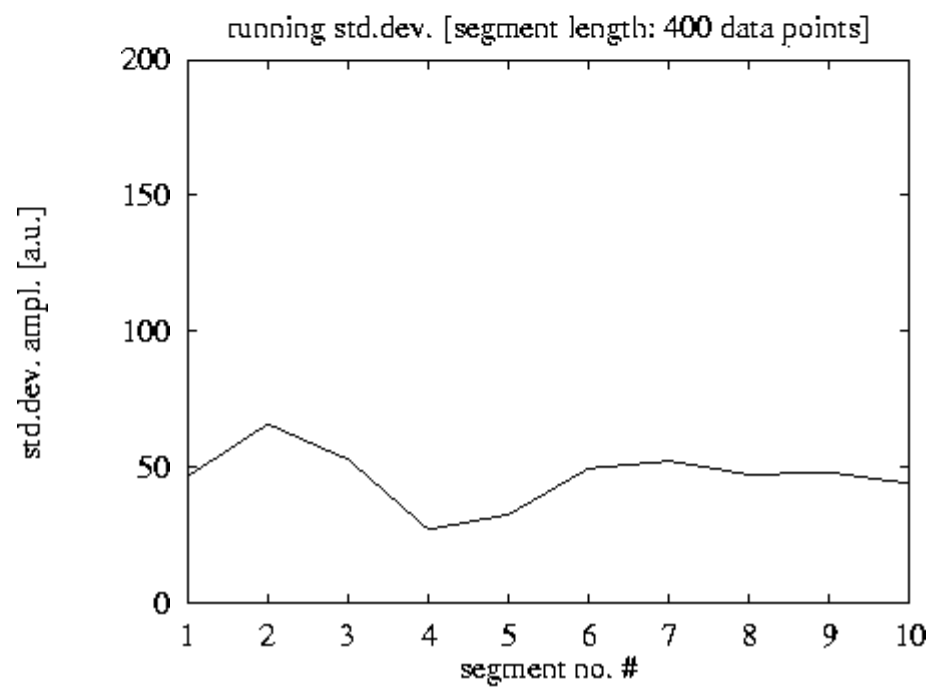
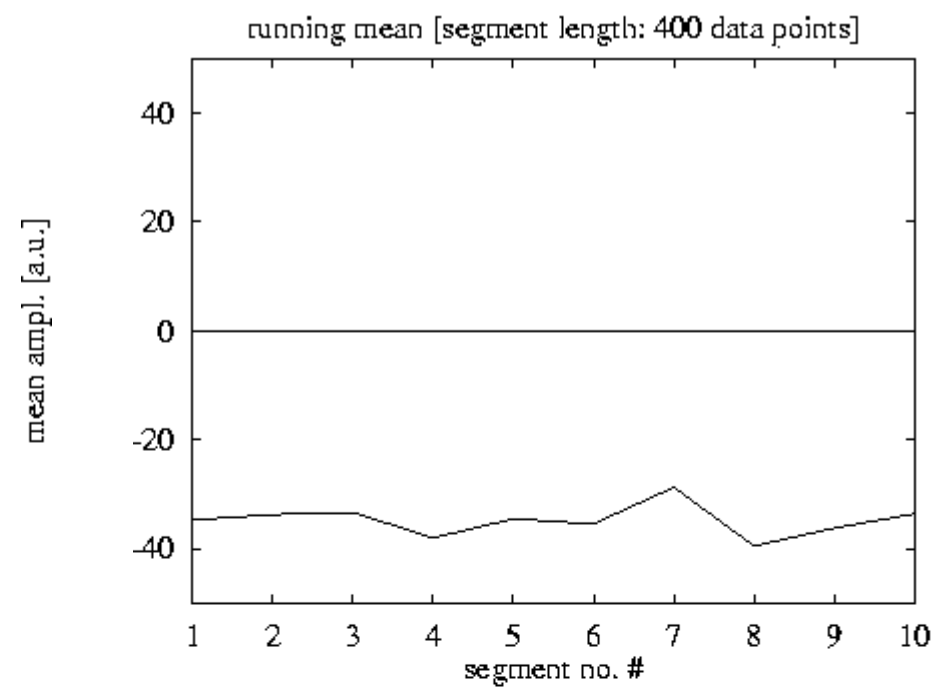
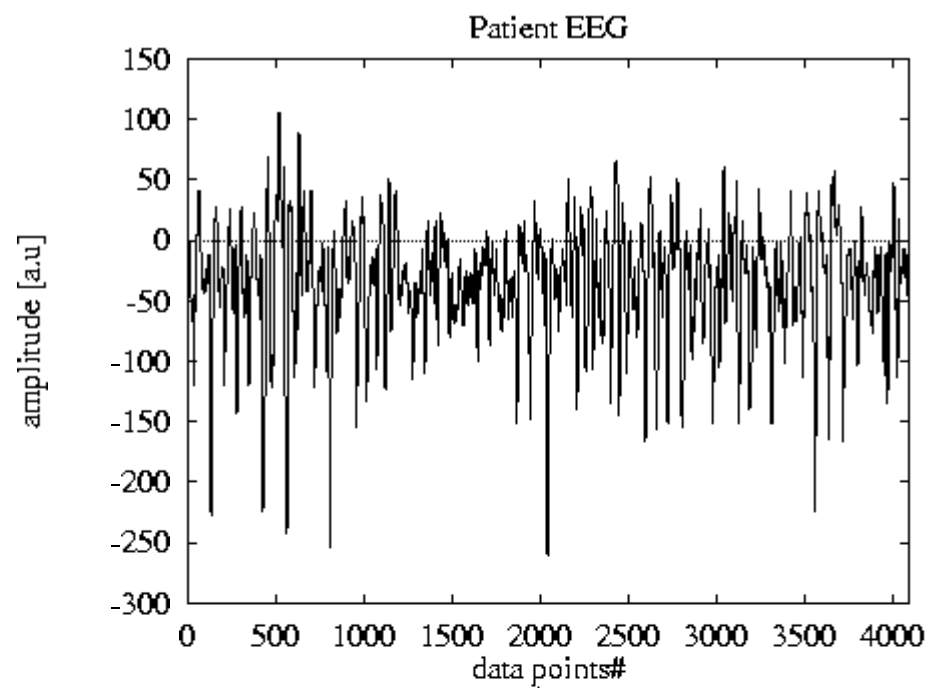
*hohe Datenpunktanzahl
ausreichende Statistik*



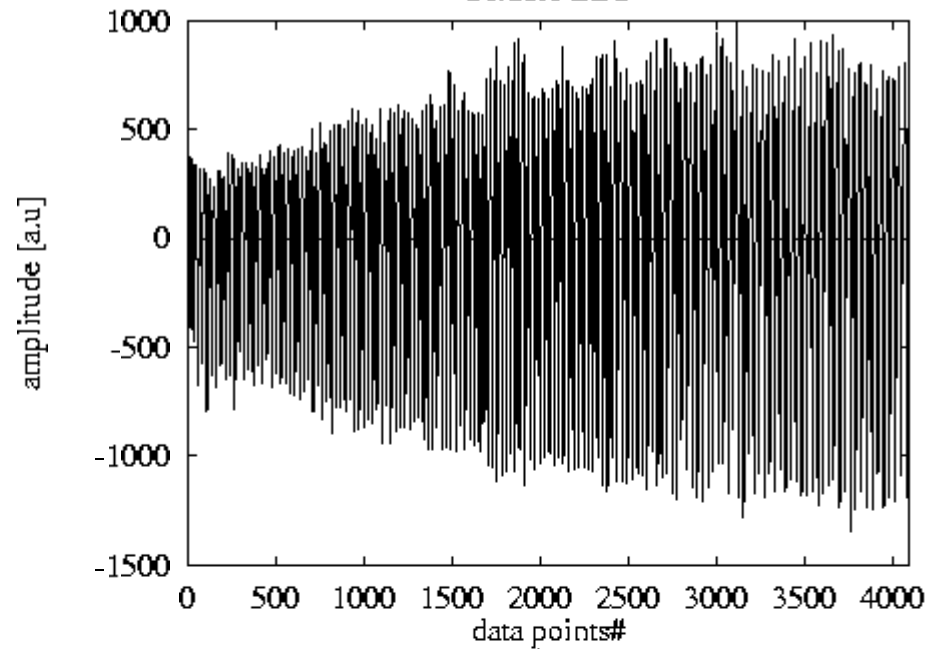
Kompromiß

(Quasi-)Stationarität

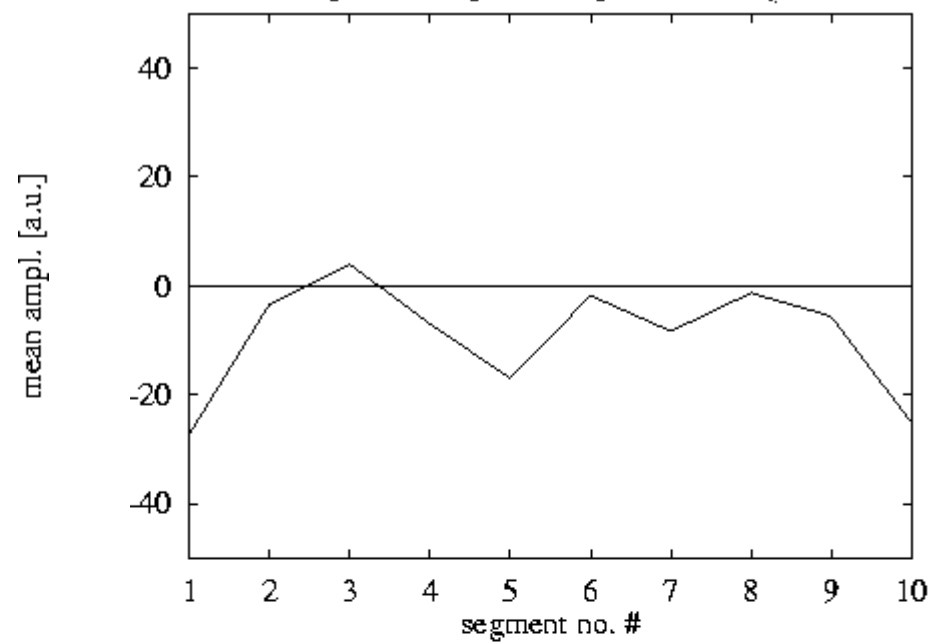




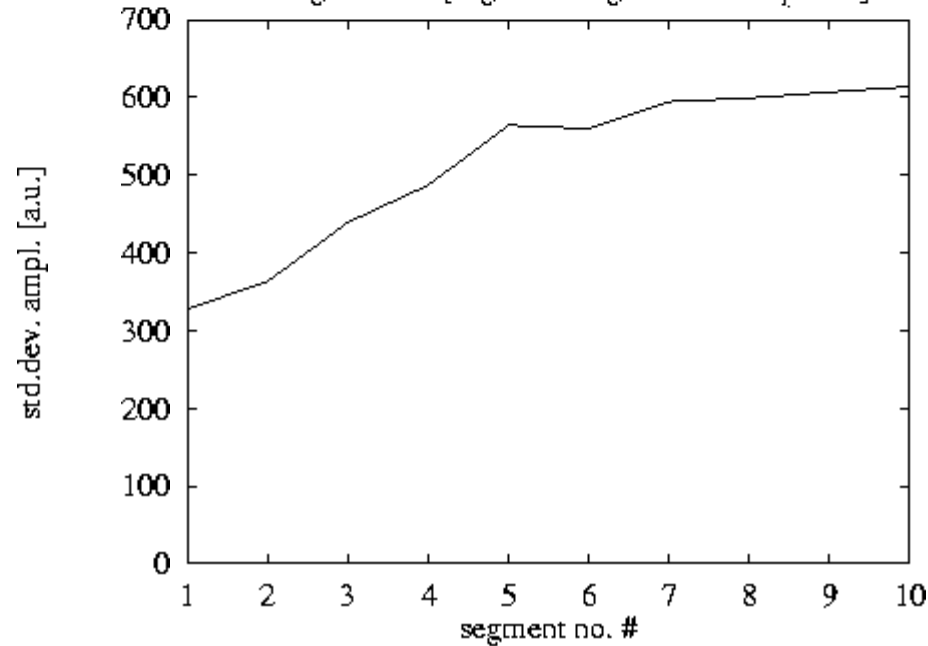
Seizure EEG



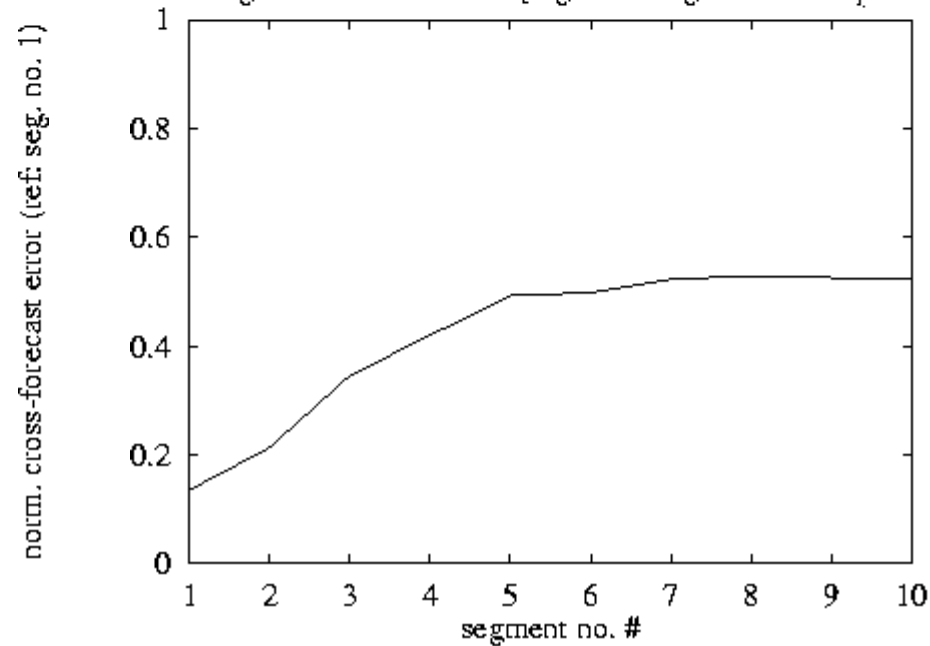
running mean [segment length: 400 data points]



running std.dev. [segment length: 400 data points]



running cross-forecast error [segment length: 400 data points]



Beeinflussende Faktoren

überlagerte dynamische Systeme

Attraktoren \leftrightarrow Unterräume des R^m (Banach-Räume)

Dimensionskonzepte \leftrightarrow Metrik

natürliche Metrik \leftrightarrow Norm (Maximum, Euklidisch, ...)

Def.:

Wenn **A** und **B** kompakte metrische Räume, dann gilt für das Produkt **AxB** (*product dynamical system*):

$$\dim(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \leq \dim(\mathbf{A}) + \dim(\mathbf{B})$$

wobei \dim = Informationsdimension D_1

Gleichheitszeichen gilt bei $D_1 = D_0$ (homogene Attraktoren)

(Hurewicz und Wallmann (1948): Dimension Theory)

Beeinflussende Faktoren

überlagerte dynamische Systeme

- **A** und **B** nicht-interagierende dynamische Systeme

- Systemobservablen:

$v(\mathbf{A})$ nur abh. von System **A**

$v(\mathbf{B})$ nur abh. von System **B**

- Gesamtobservable:

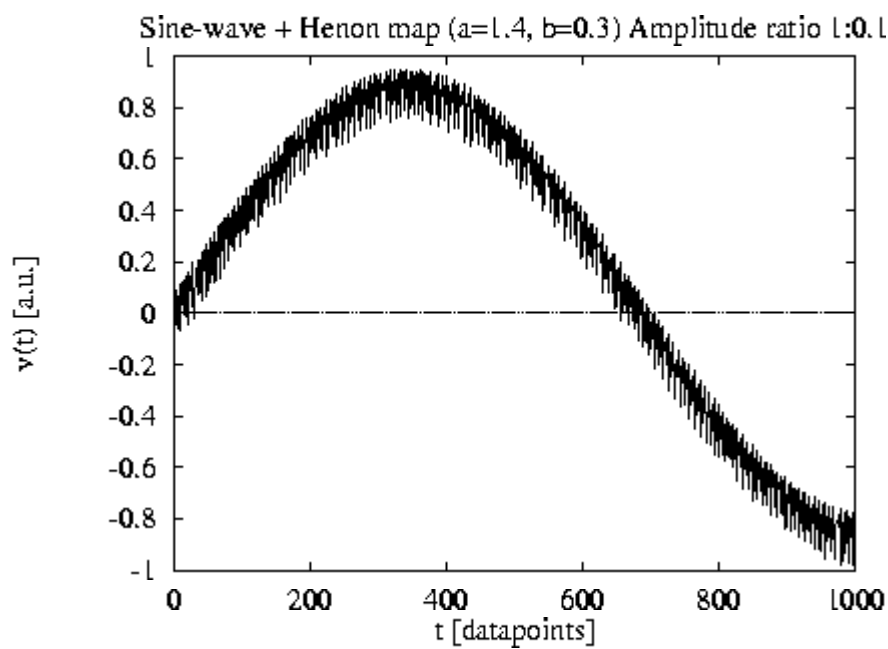
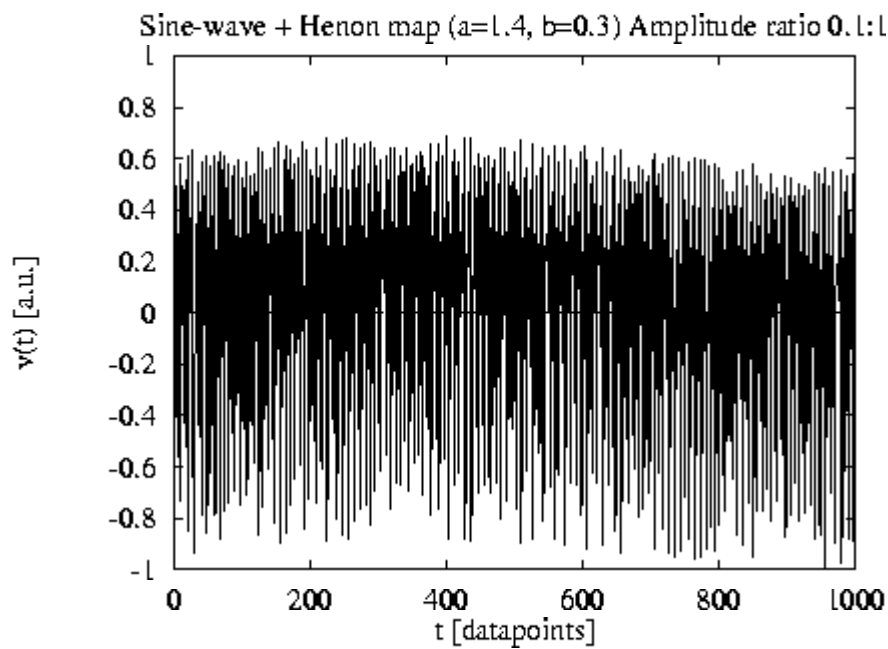
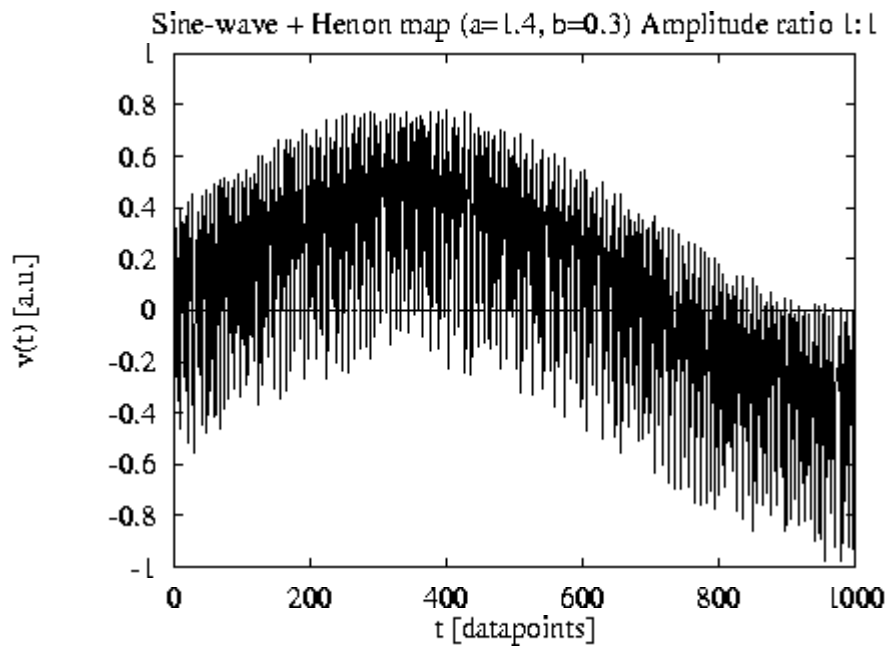
$$v(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = av(\mathbf{A}) + bv(\mathbf{B})$$

- betrachte

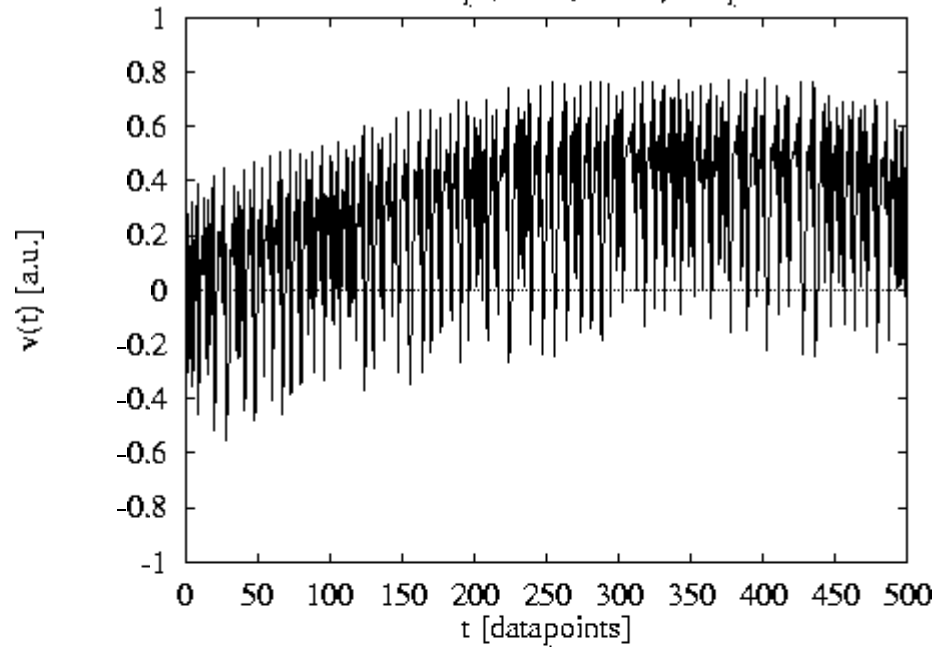
$$a < b$$

$$a > b$$

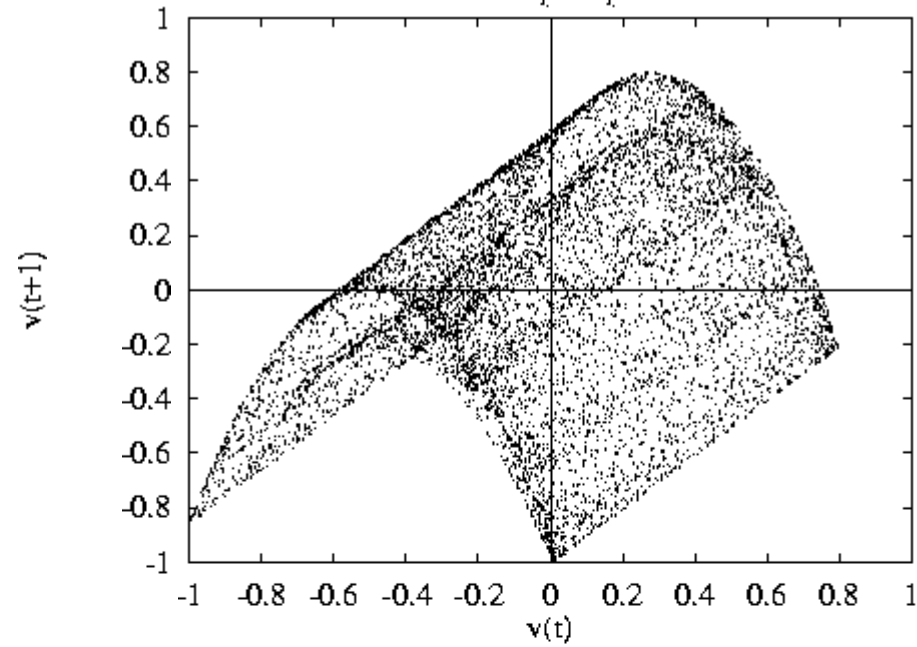
$$a = b$$



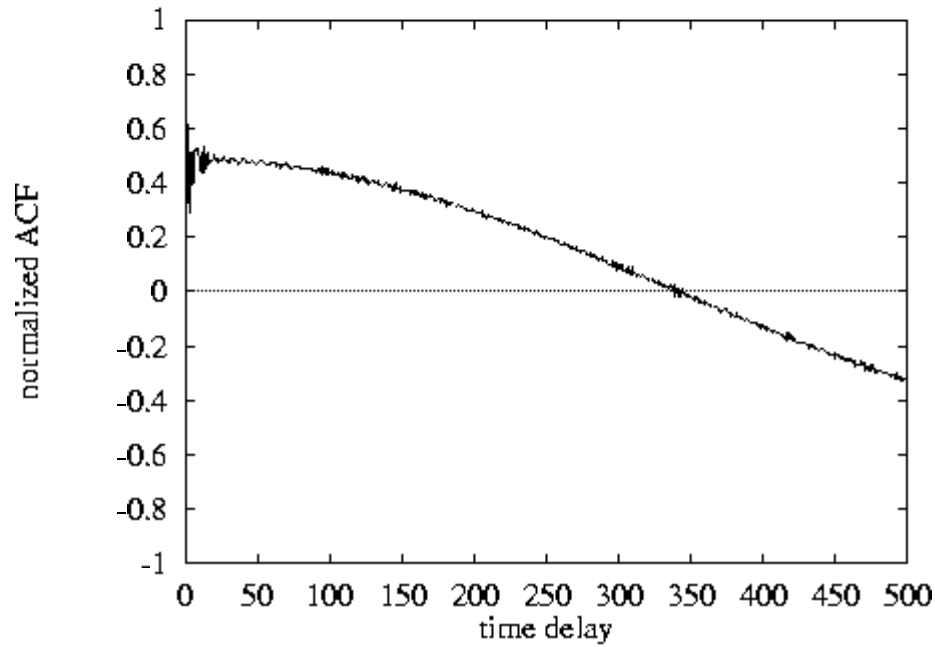
Sine-wave + Henon map ($a=1.4$, $b=0.3$) Amplitude ratio 1:1



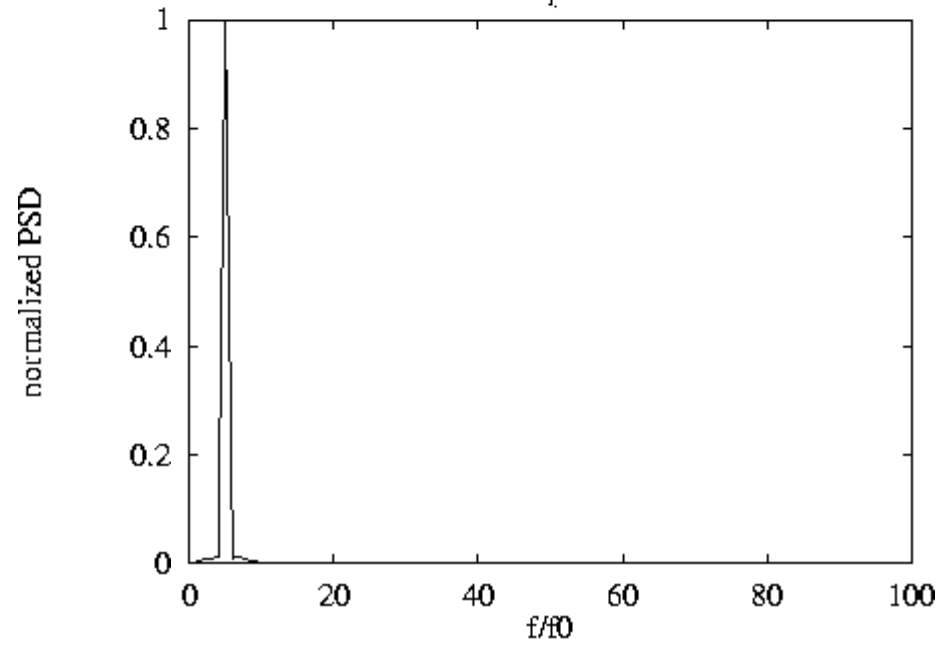
Phase space plot



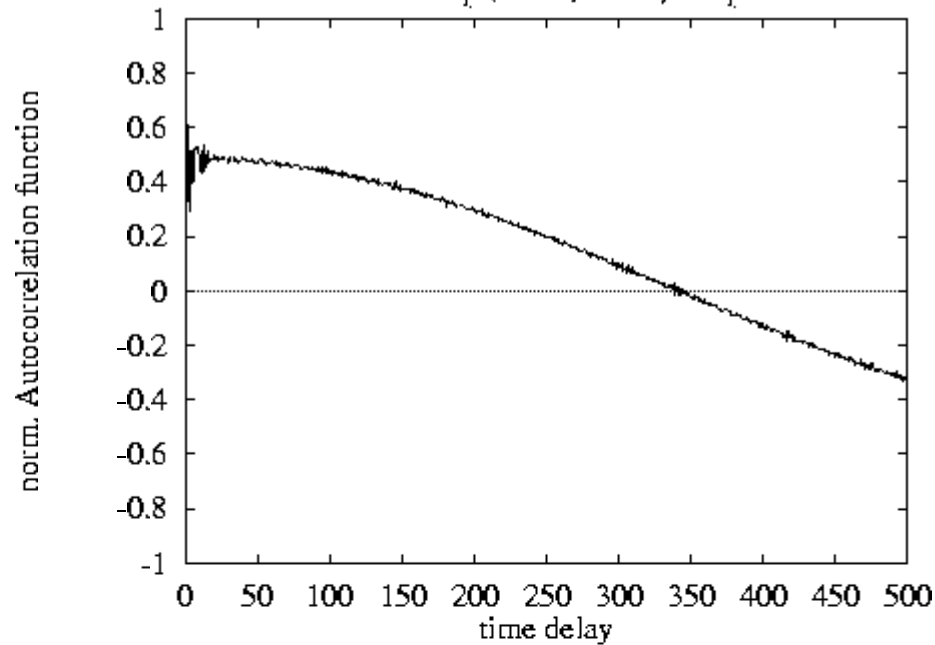
Autocorrelation function



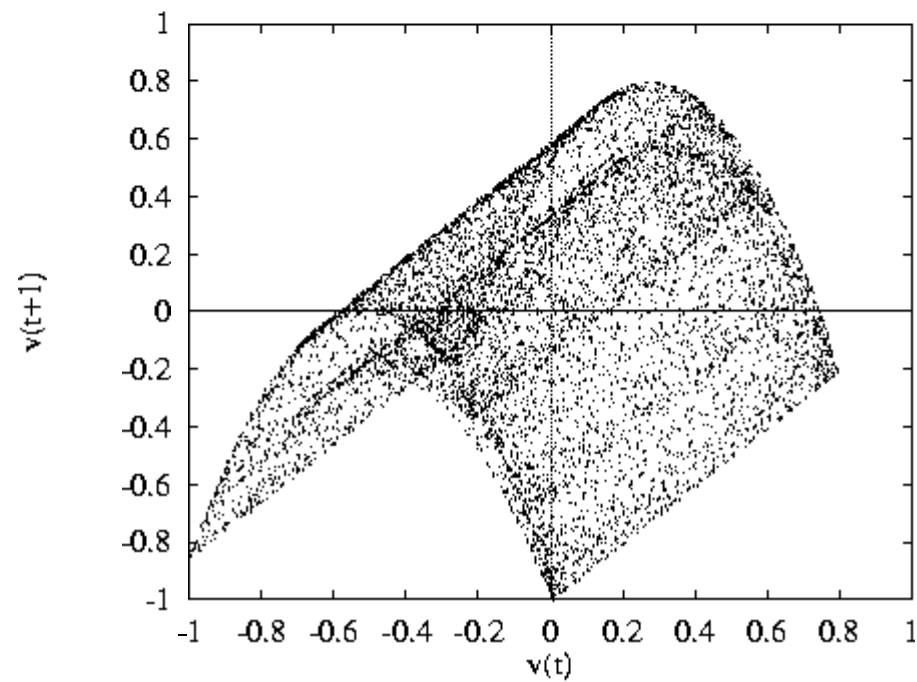
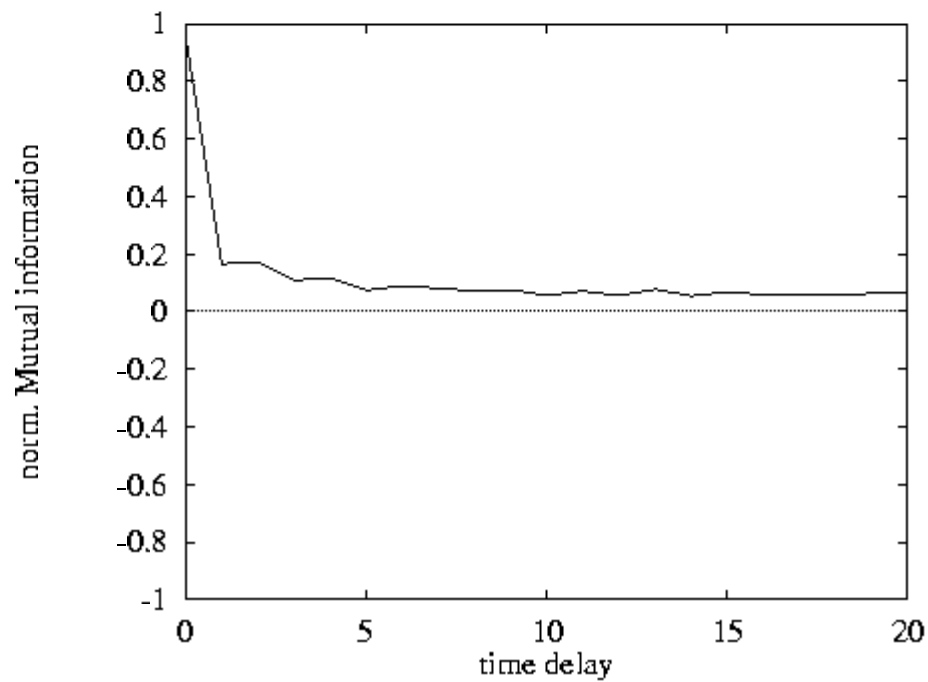
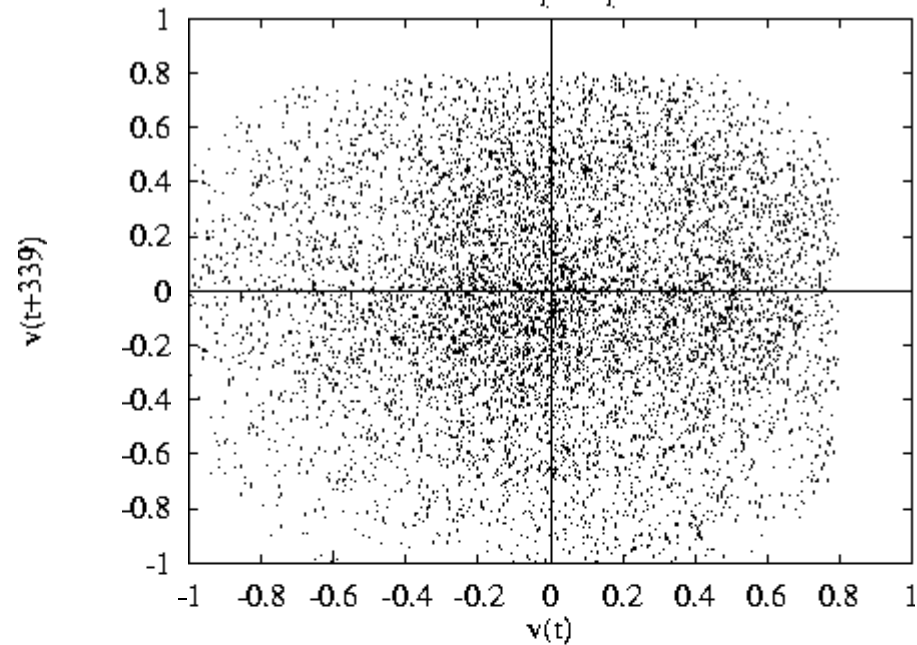
Power spectrum



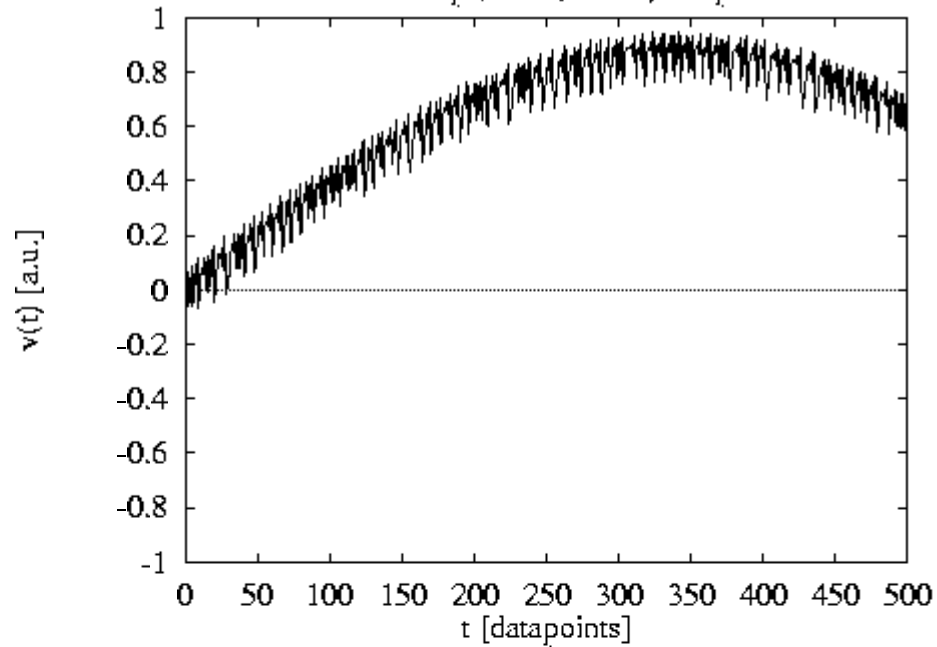
Sine-wave + Henon map ($a=1.4$, $b=0.3$) Amplitude ratio 1:1



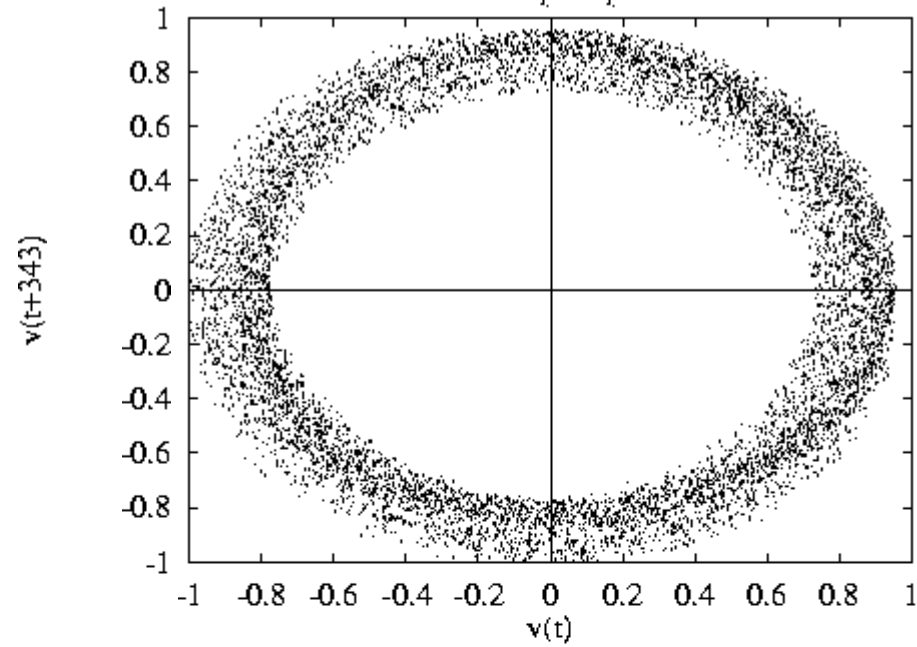
Phase space plot



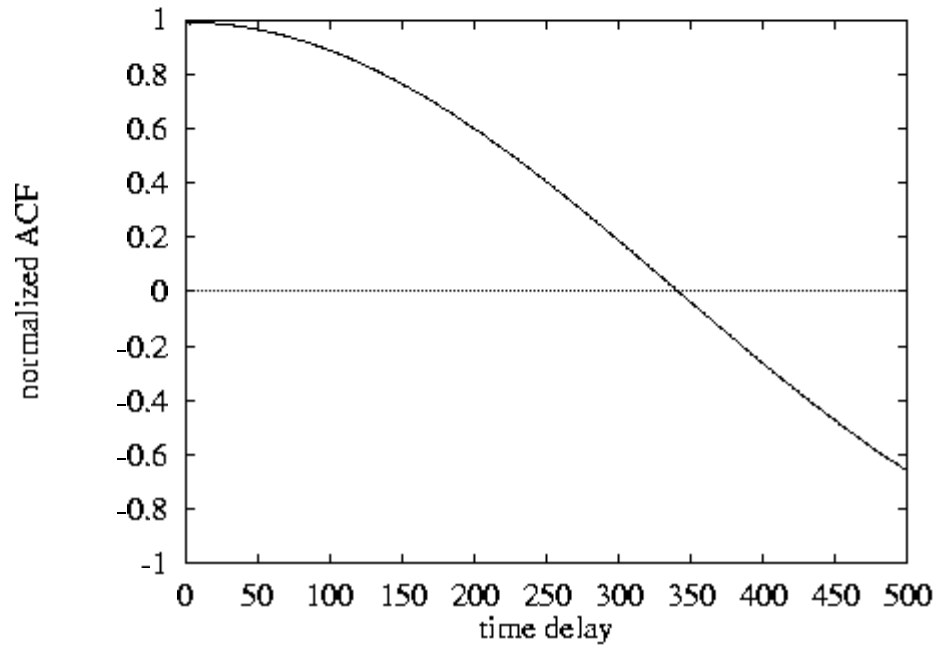
Sine-wave + Henon map ($a=1.4$, $b=0.3$) Amplitude ratio 0.1:1



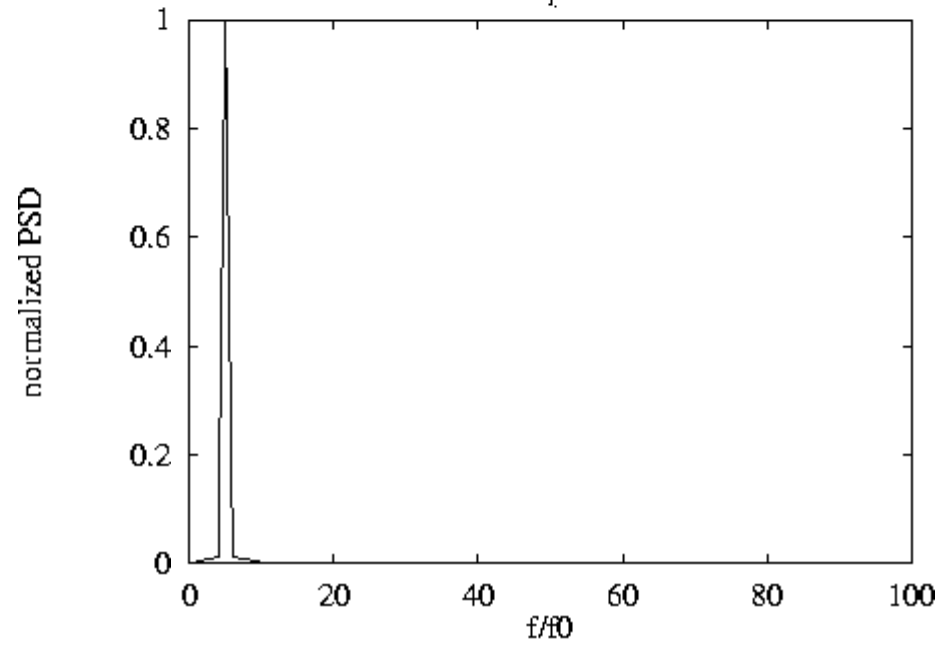
Phase space plot



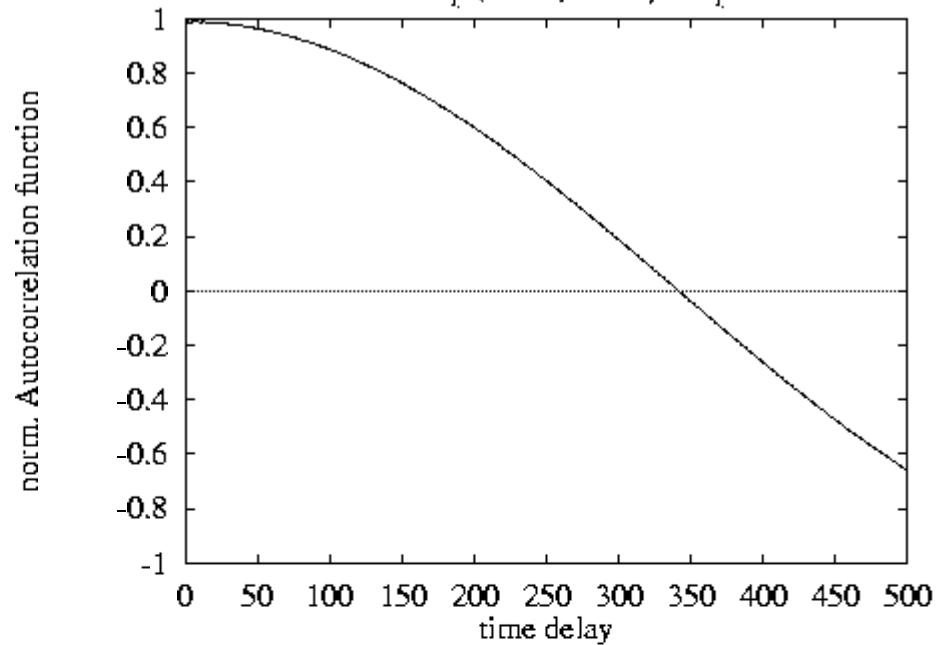
Autocorrelation function



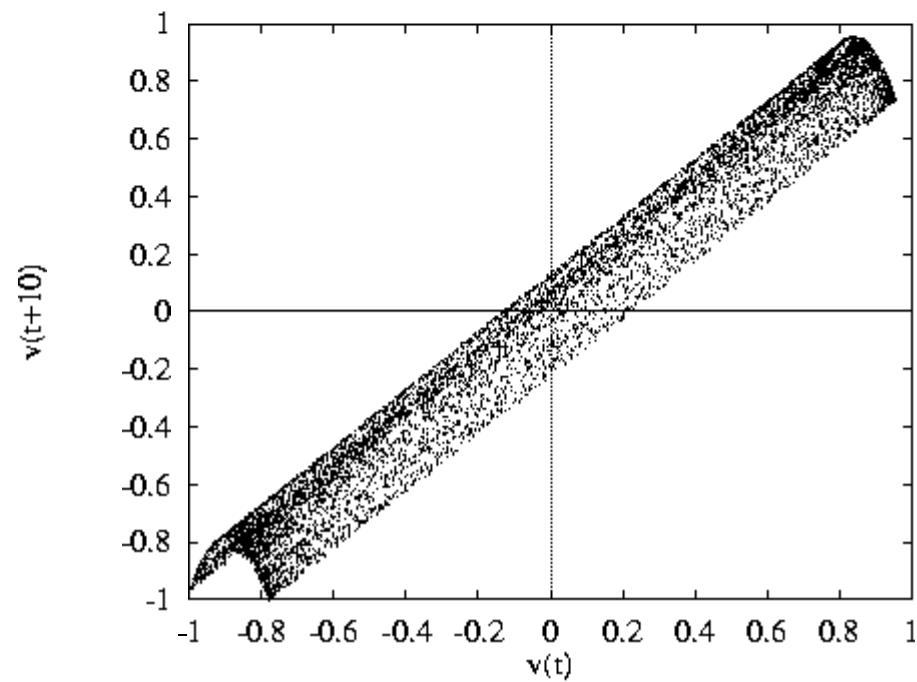
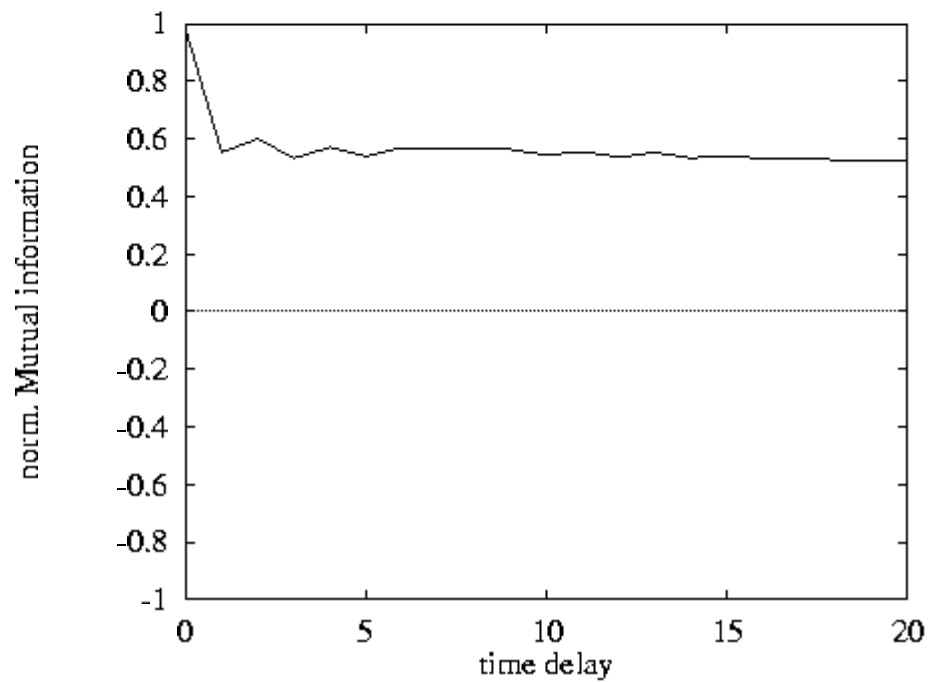
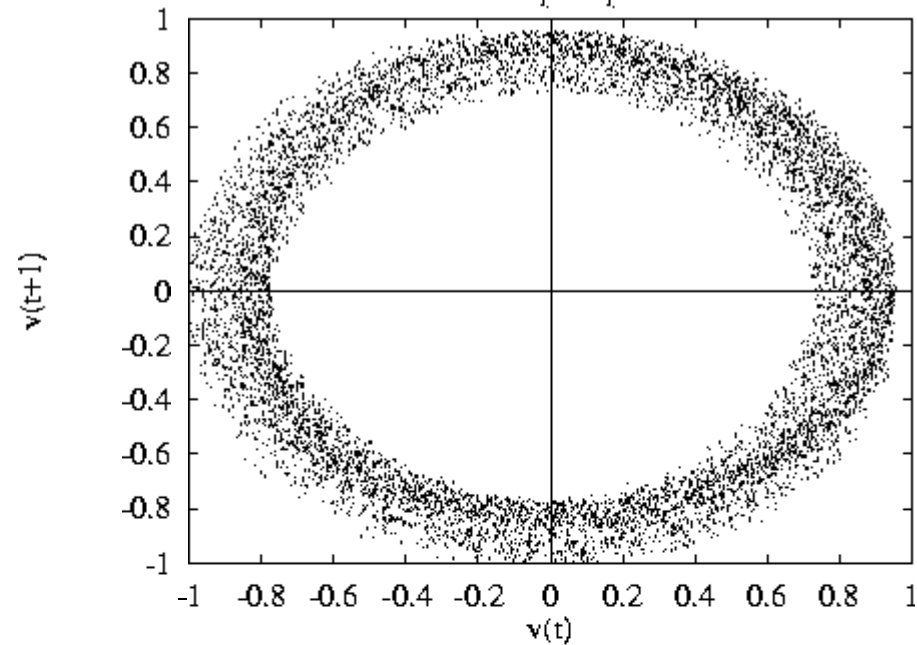
Power spectrum



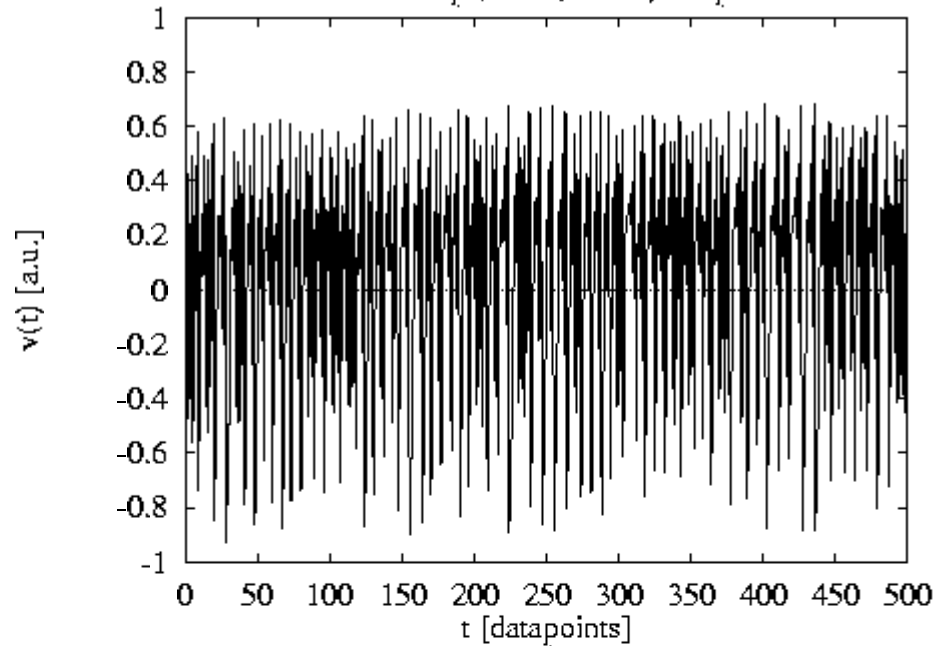
Sine-wave + Henon map ($a=1.4$, $b=0.3$) Amplitude ratio 0.1:1



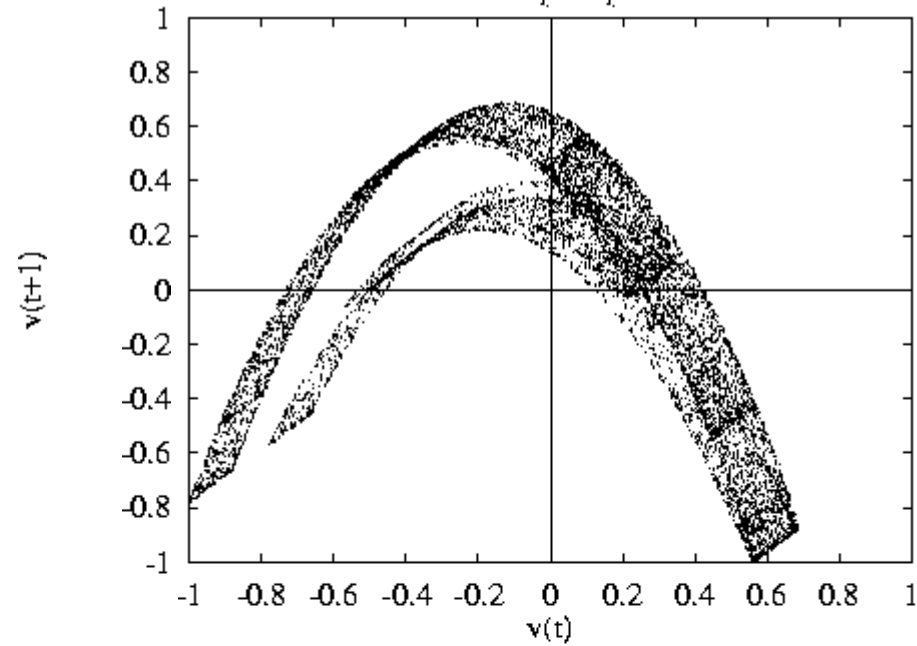
Phase space plot



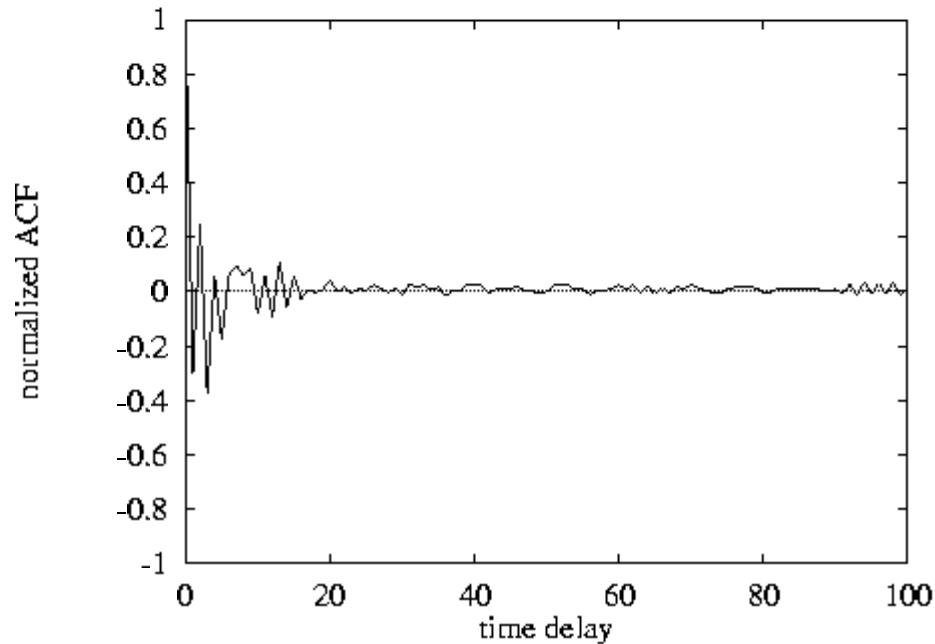
Sine-wave + Henon map ($a=1.4$, $b=0.3$) Amplitude ratio 1:0.1



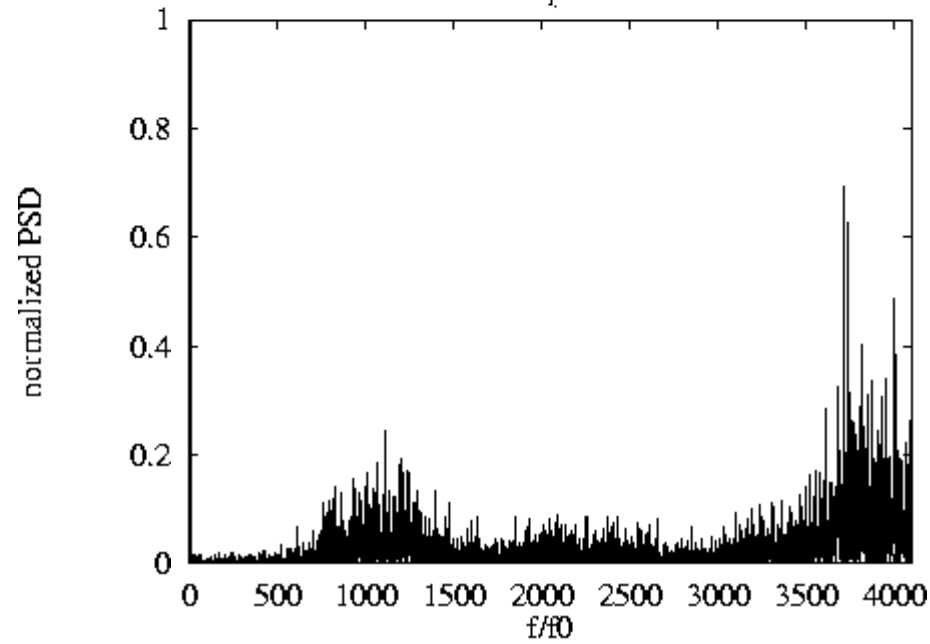
Phase space plot



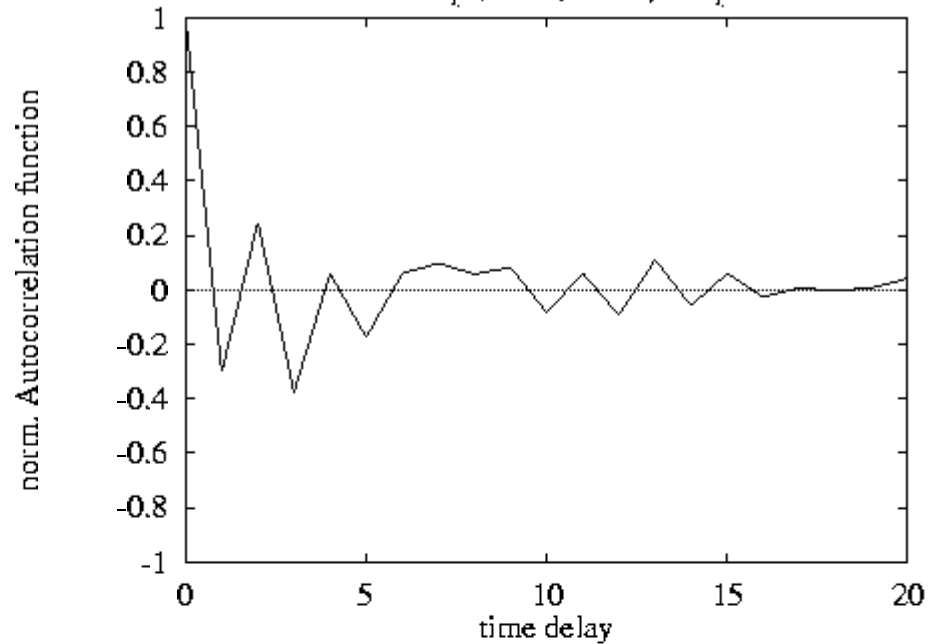
Autocorrelation function



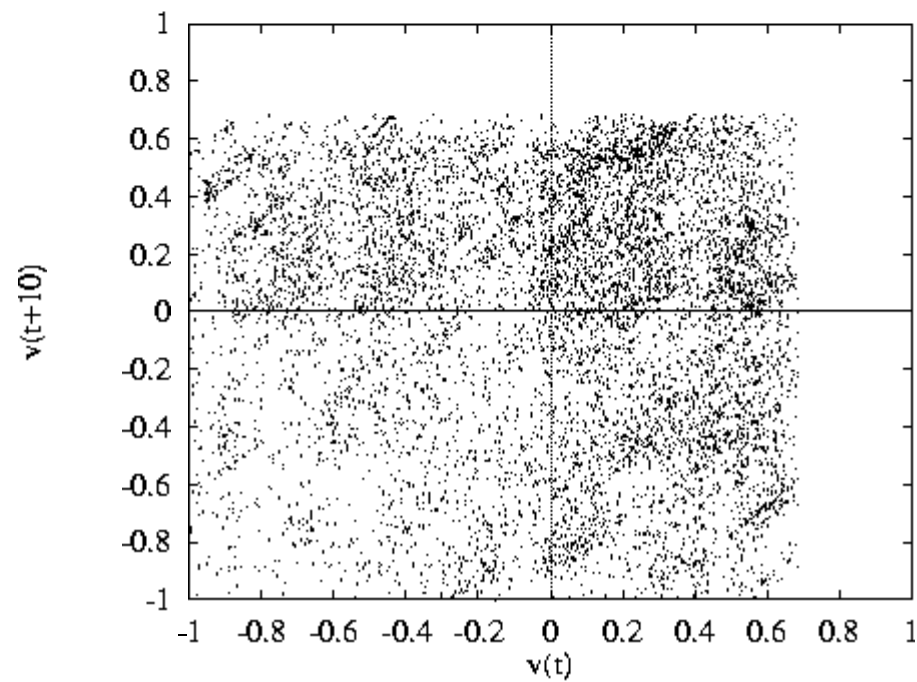
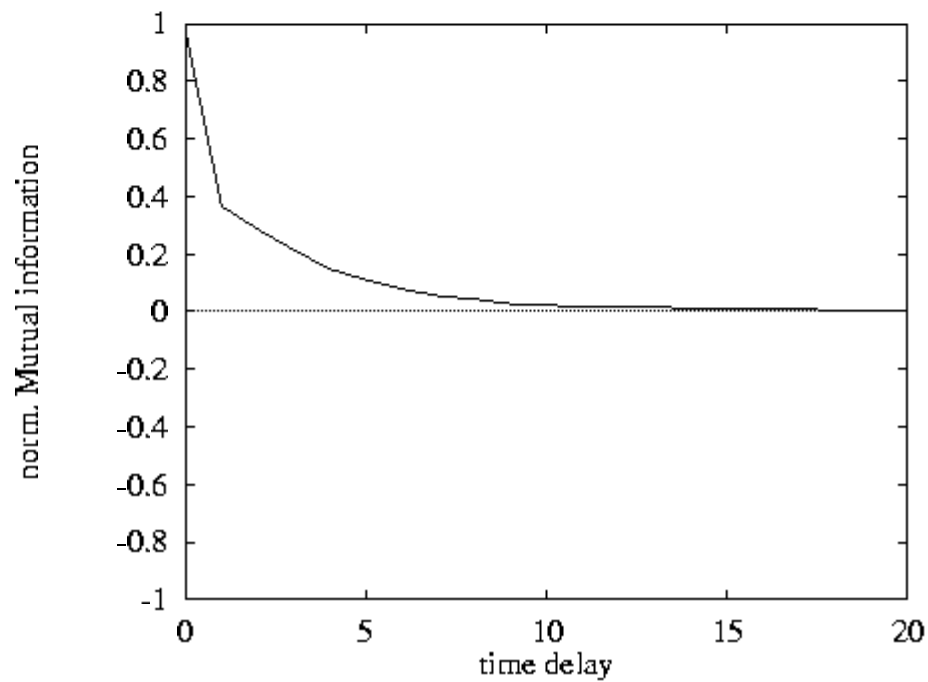
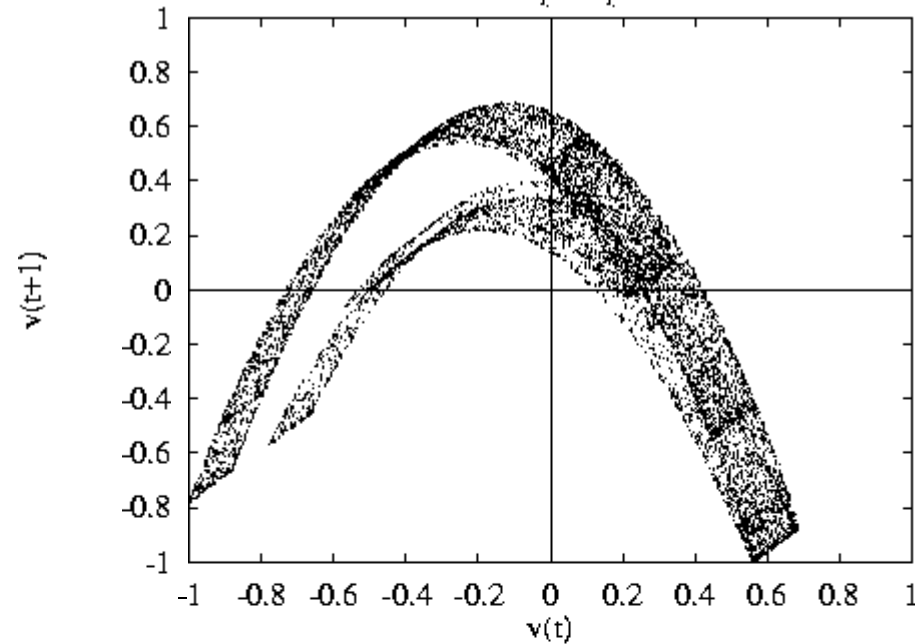
Power spectrum

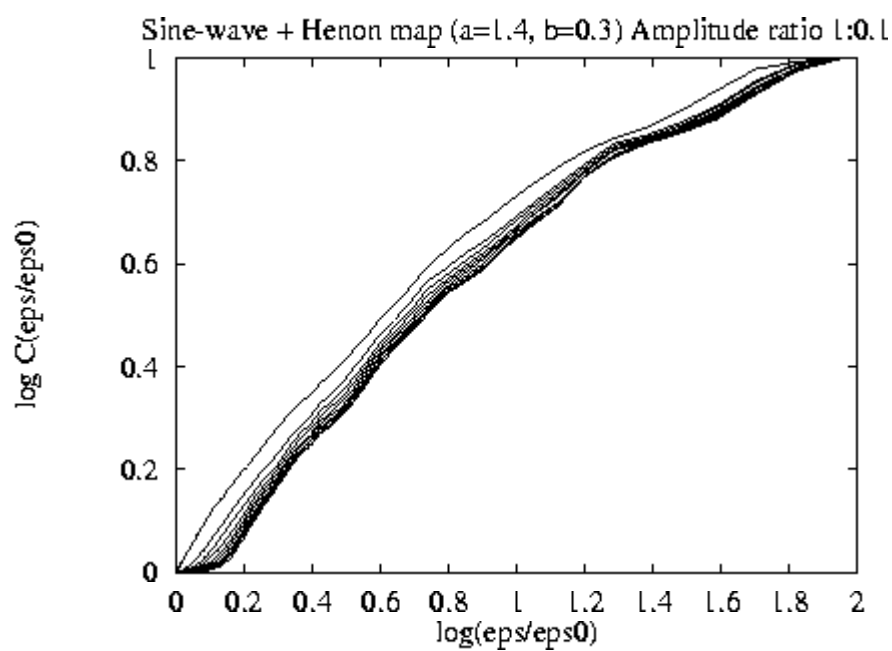
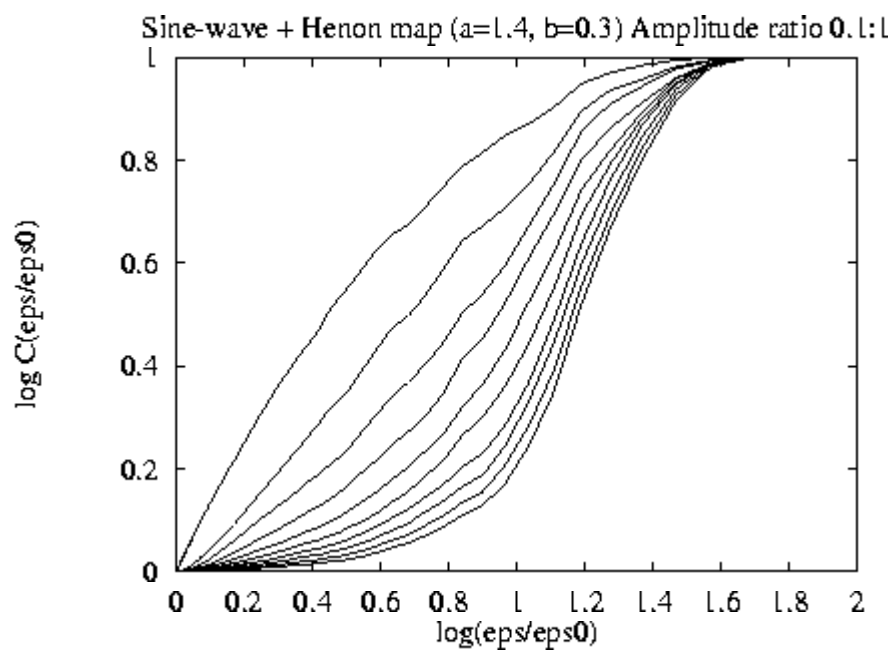
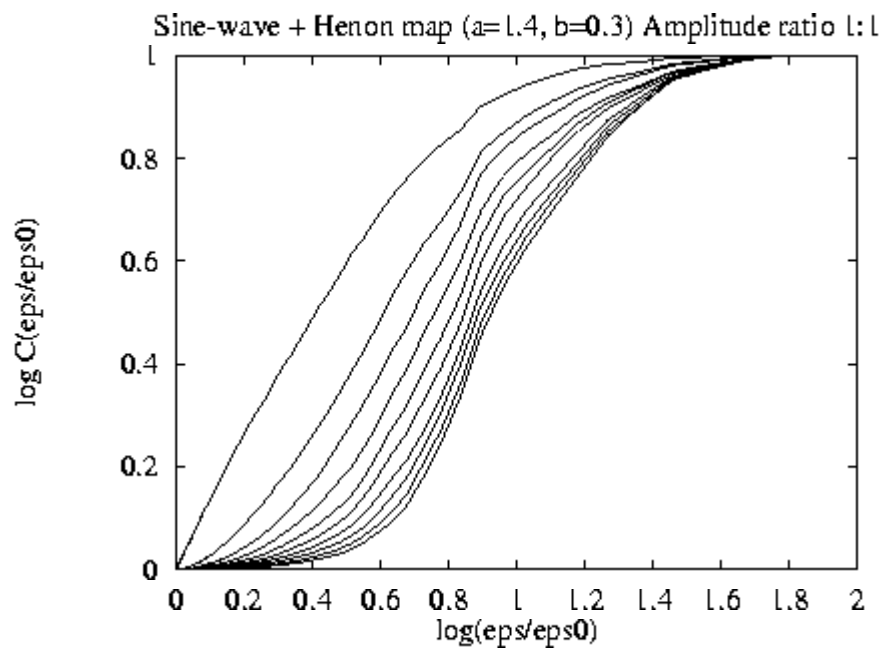


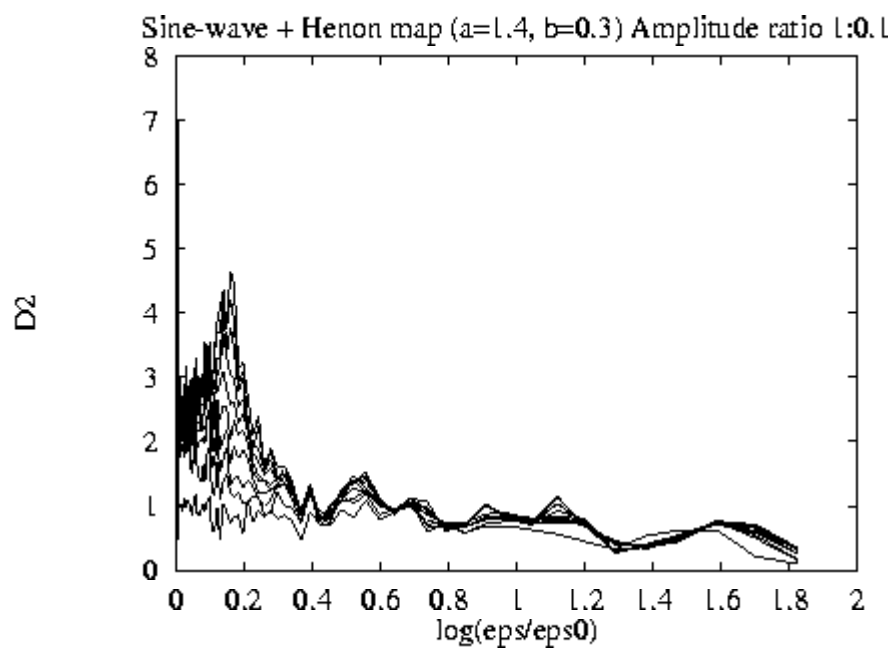
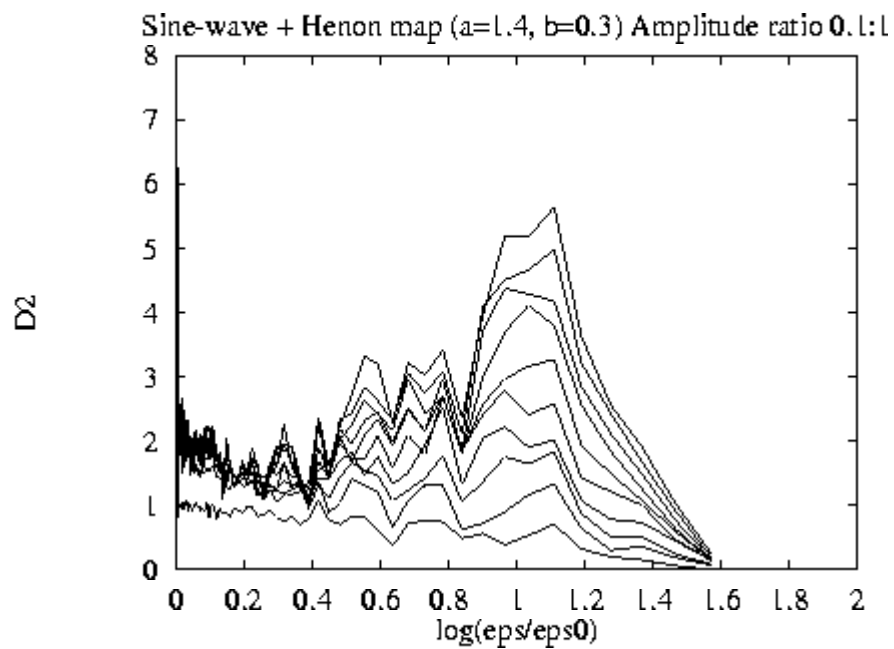
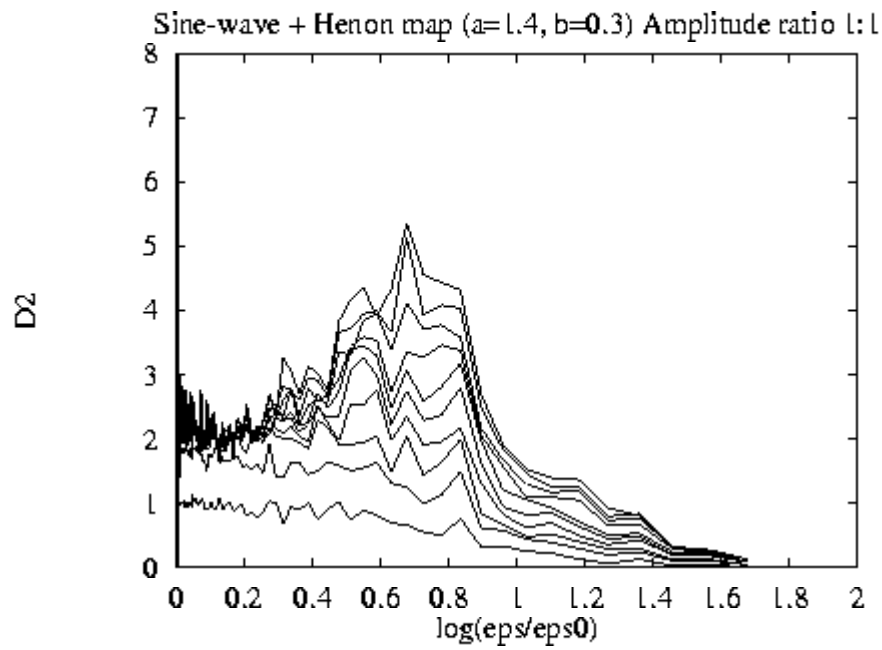
Sine-wave + Henon map ($a=1.4$, $b=0.3$) Amplitude ratio 1:0.1

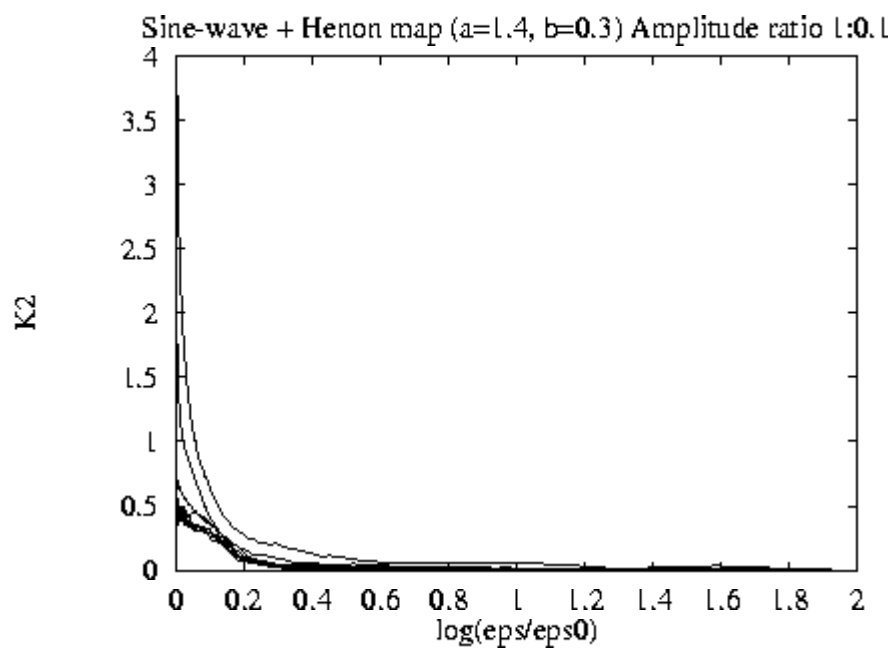
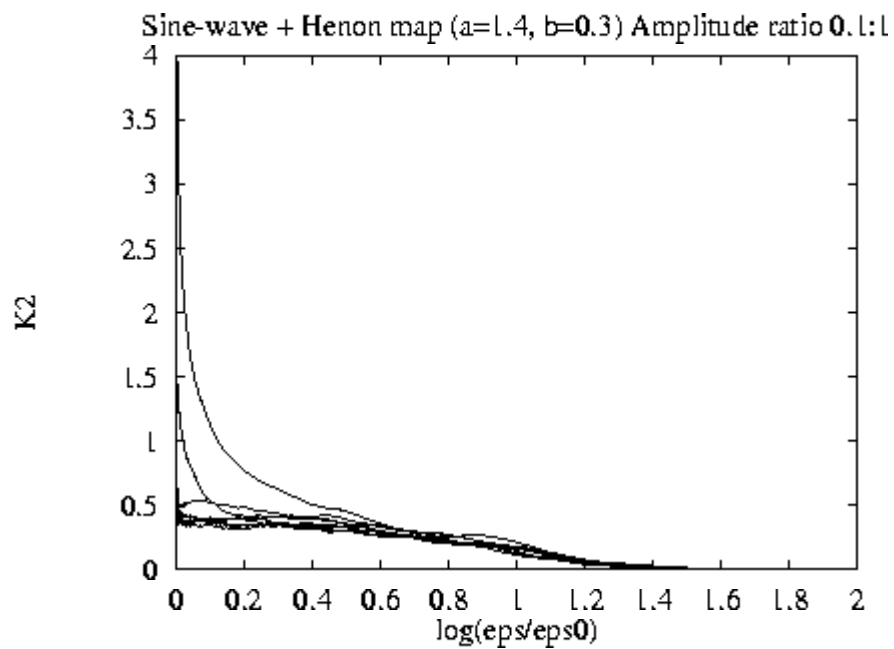
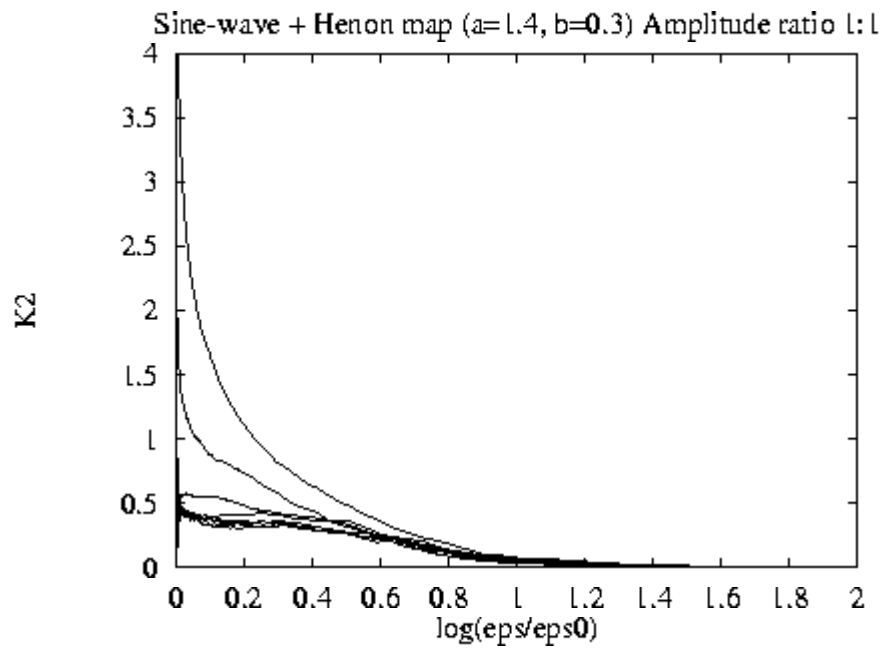


Phase space plot









Beeinflussende Faktoren

überlagerte dynamische Systeme

Trennung überlagerter dynamischer Systeme



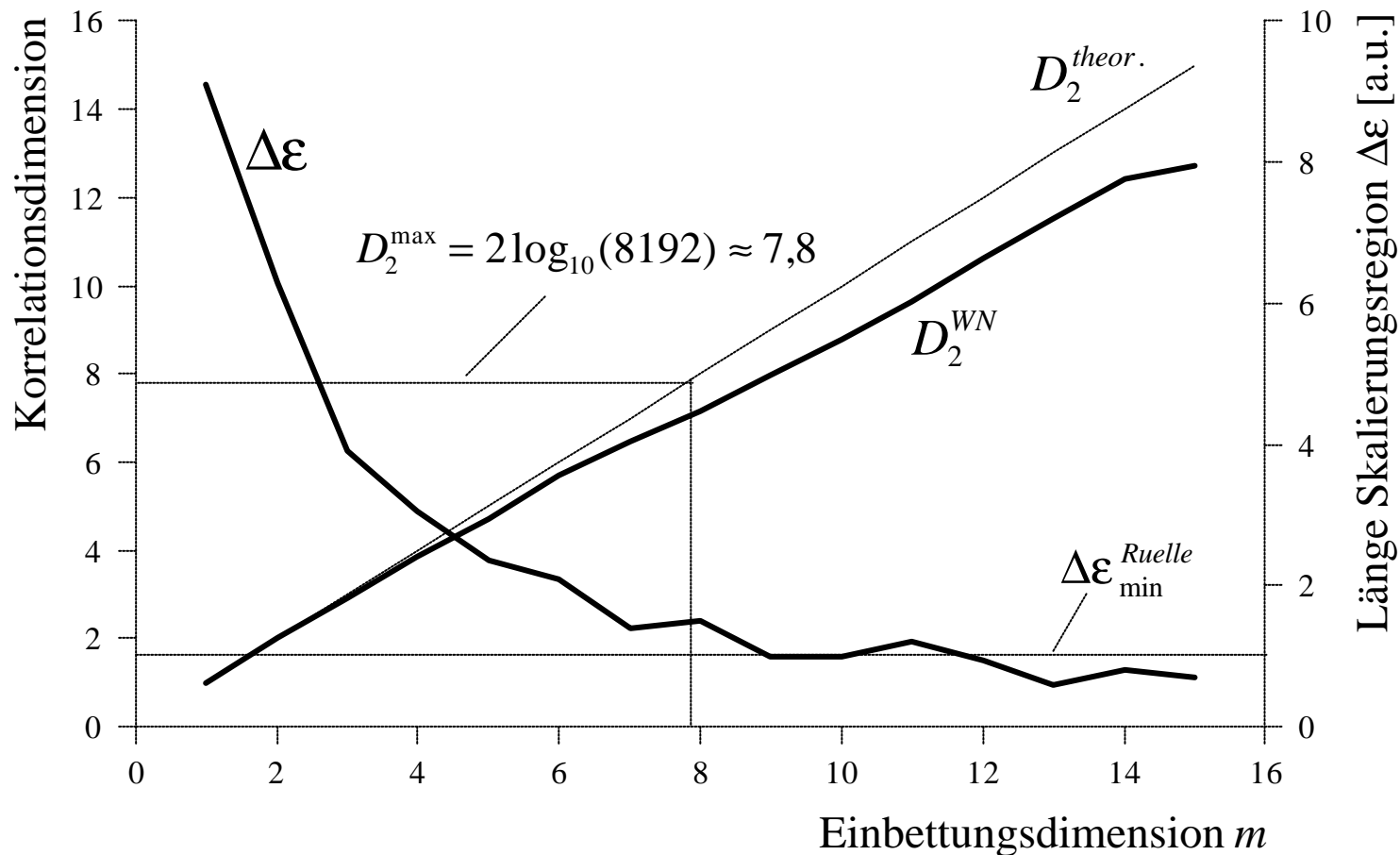
Amplitudenverhältnisse
Rauschen

"optimale" Trennung
abhängig von spezieller Anwendung

Beeinflussende Faktoren

Weißes Rauschen

Weißes Rauschen, $N=8192$



für $N \rightarrow \infty$

$\Rightarrow (D, \lambda_1, K) \rightarrow \infty$

für $N \ll \infty$

$\Rightarrow 0 \leq (D, \lambda_1, K) \ll \infty$

- Diskriminanz Stochastizität - Determinismus schwierig
- Tests auf Nichtlinearität erforderlich

Osborne & Provenzale (Physica D 35, 357, 1989):

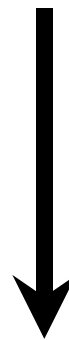
"Finite correlation dimension for stochastic systems with power-law spectra."

Osborne, Provenzale & Soj (Physica D 47, 361, 1991):

"Convergence of K2 entropy for random noises with power-law spectra."

Problem:

begrenzte Datenpunktanzahl und **hohe** Autokorrelationen



Nichtberücksichtigung

falsche Dimensionsabschätzungen

Minimierung falscher Dimensionsabschätzungen

Problem:

hohe Autokorrelationen innerhalb der Zeitreihe

→ "unechte" Korrelationen im Phasenraum + Phasenraumkorrelationen

→ Korrelationssummen zeigen "Schultern"

→ "gute", jedoch falsche Schätzungen der Korrelationsdimension

Minimierungsmöglichkeit:

Theiler-Korrektur (Theiler, PRA 34, 2427, 1986)

$$C_m(\varepsilon) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N H(\varepsilon - |\mathbf{v}_m(i) - \mathbf{v}_m(j)|)$$

Theiler-Korrektur



$$C_m(\varepsilon) = \frac{1}{N^2} \sum_{i=W}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N H(\varepsilon - |\mathbf{v}_m(i) - \mathbf{v}_m(j)|)$$

$$H = \text{Heaviside Funktion} \begin{cases} H(a) = 0, & a < 0 \\ H(a) = 1, & \text{sonst} \end{cases}$$

Theiler-Korrektur

Wahl des cutoff-Parameters W

Minimalanforderung: $W \approx \tau$ (Autokorrelationszeit)

besser: $W > \tau \left(\frac{2}{N} \right)^{2/m}$ $N = \text{Datenpunktanzahl}, m = \text{Einbettungsdimension}$

\Rightarrow exakte Wahl von W dann unerheblich

Rapp et al., PRE, 47, 2289 (1993):

"Filtered noise can mimic low-dimensional chaotic attractors"

- 8192 Zufallszahlen
- Fouriertransformation
- Multiplikation des j -ten Elements der Fourierkoeffizienten mit

$$F_j = \max(0, 1 - kj^2), \quad k = 0,37 \times 10^{-6}$$

- Rücktransformation
- FFT linear \rightarrow Filter linear
- Filter entspricht Theorem von Broomhead, Huke und Muldoon (1992)

Theorem von Broomhead, Huke und Muldoon

(J Roy Stat Soc B 54, 373, 1992)

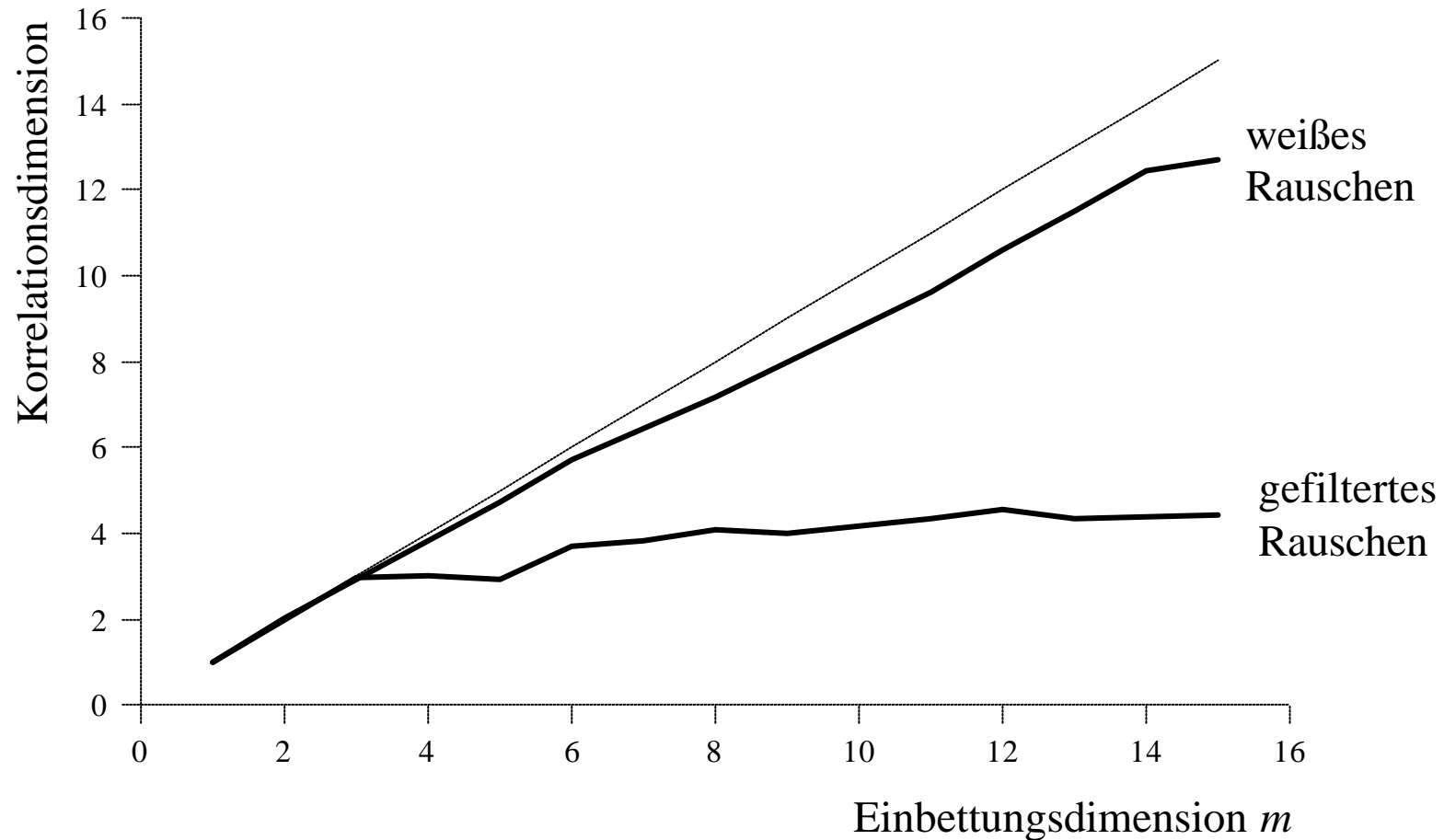
Nicht-rekursive Filter mit endlicher Ordnung verändern Systemcharakteristika, die nach einer Einbettung (Zeitverzögerungskoodinaten) extrahiert worden sind, **nicht**. Dazu gehören auch Lyapunov-Exponenten, Kolomogorov-Entropie und Dimensionen.

Dieses Theorem gilt i.A. **nicht** für numerisch geschätze Werte.

Beeinflussende Faktoren

Tiefpass-Rauschen

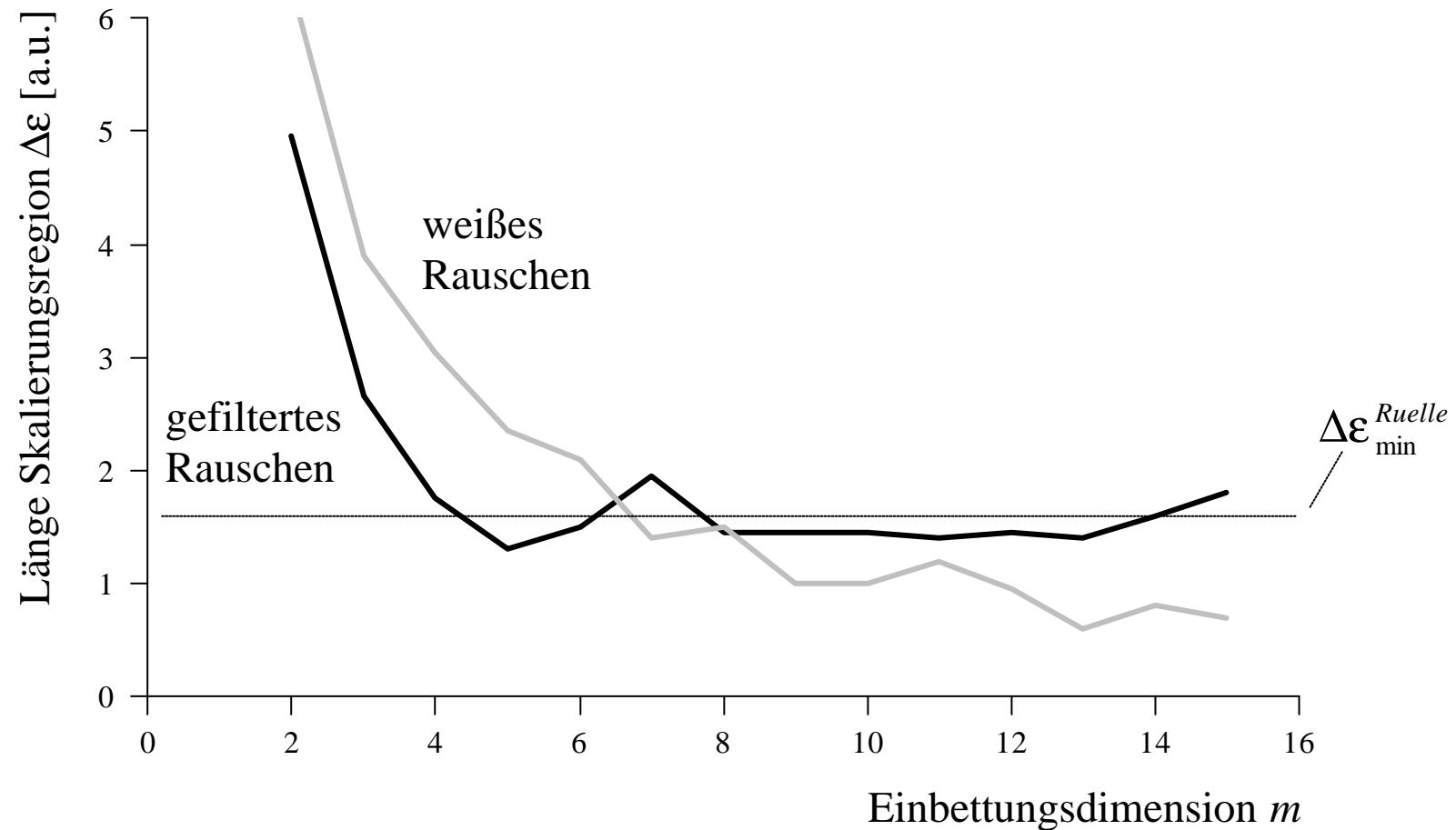
gefiltertes Rauschen, N=8192, Theiler-Korrektur



Beeinflussende Faktoren

Tiefpass-Rauschen

gefiltertes Rauschen, N=8192, Theiler-Korrektur



- Filterung:
 - Struktur im Phasenraum
 - räumliche (langreichweitige) Korrelationen
 - Theiler-Korrektur minimiert nur kurzreichweitige Korrelationen
- ⇒
- Diskriminanz Stochastizität - Determinismus schwierig
 - Tests auf Nichtlinearität erforderlich