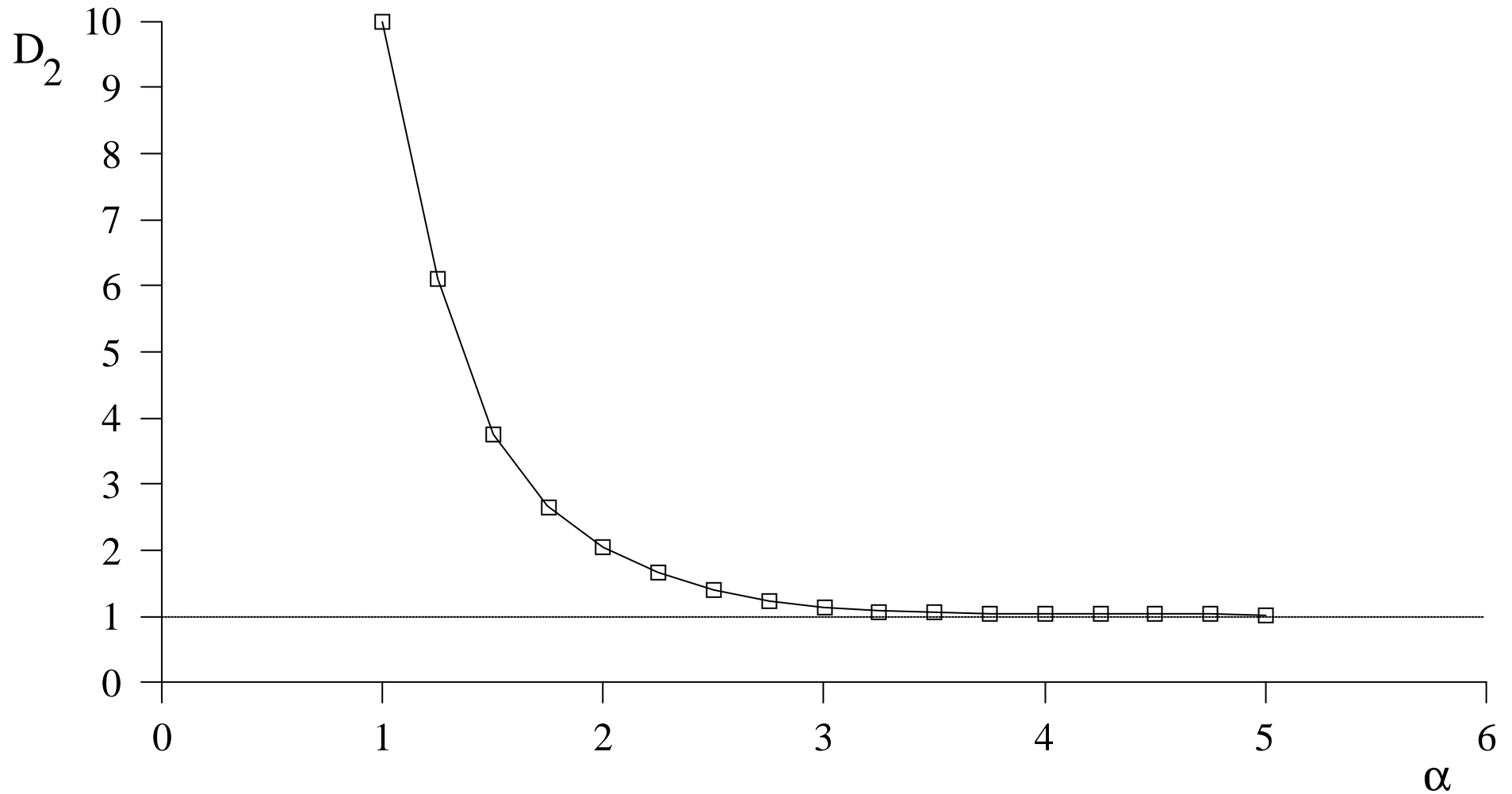
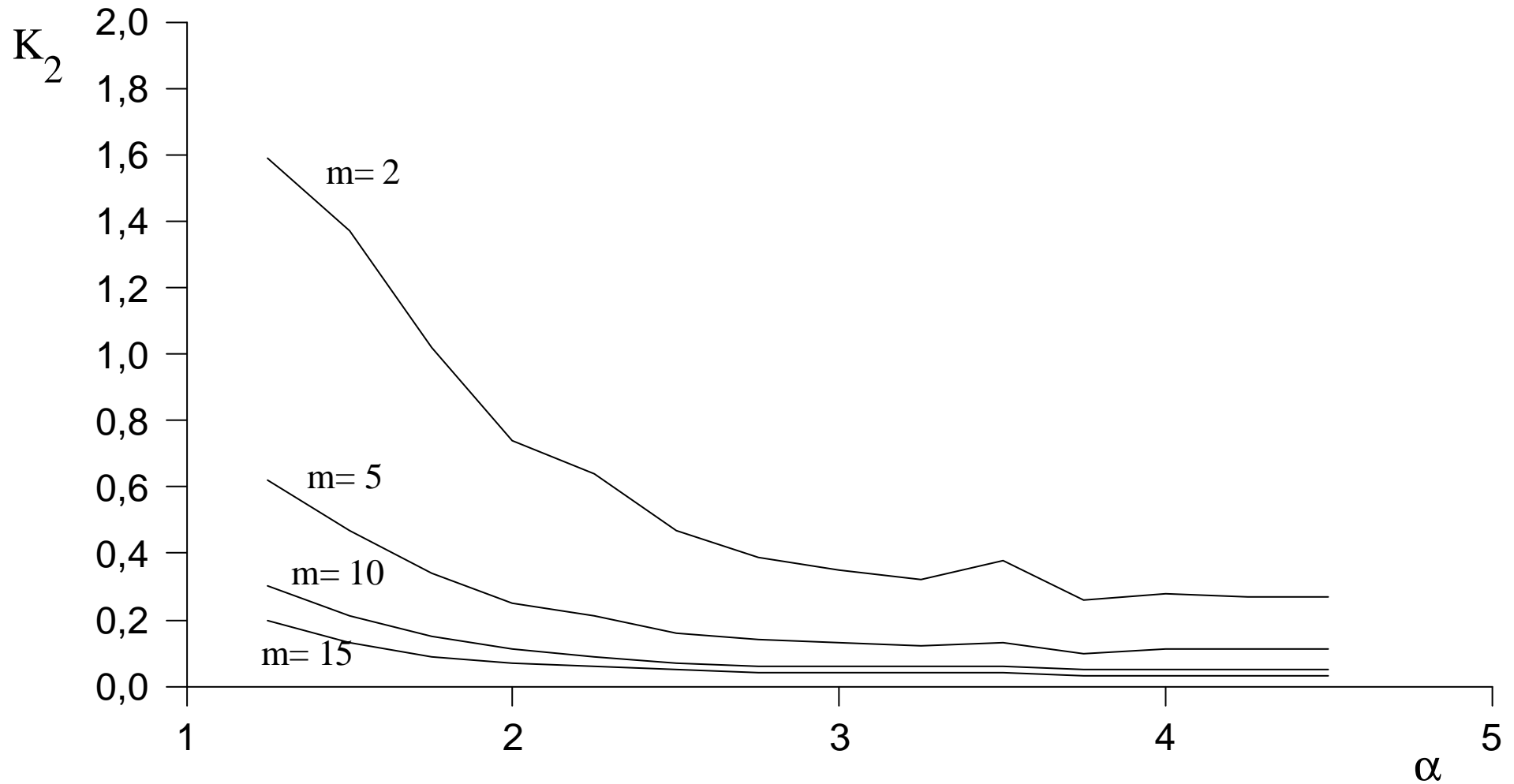


Korrelationsdimension und $1/f^\alpha$ -Rauschen



aus: Osborne & Provenzale (Physica D 35, pp 357, 1989):
"Finite correlation dimension for stochastic systems with power-law spectra"

K_2 -Entropie und $1/f^\alpha$ -Rauschen



aus: Osborne, Provenzale & Soj (Physica D 47, pp 361, 1991):
"Convergence of K2 entropy for random noises with power-law spectra"

*blindes und unsachgemäßes Anwenden
nichtlinearer Zeitreihenanalyseverfahren
kann zu Fehlinterpretationen führen*



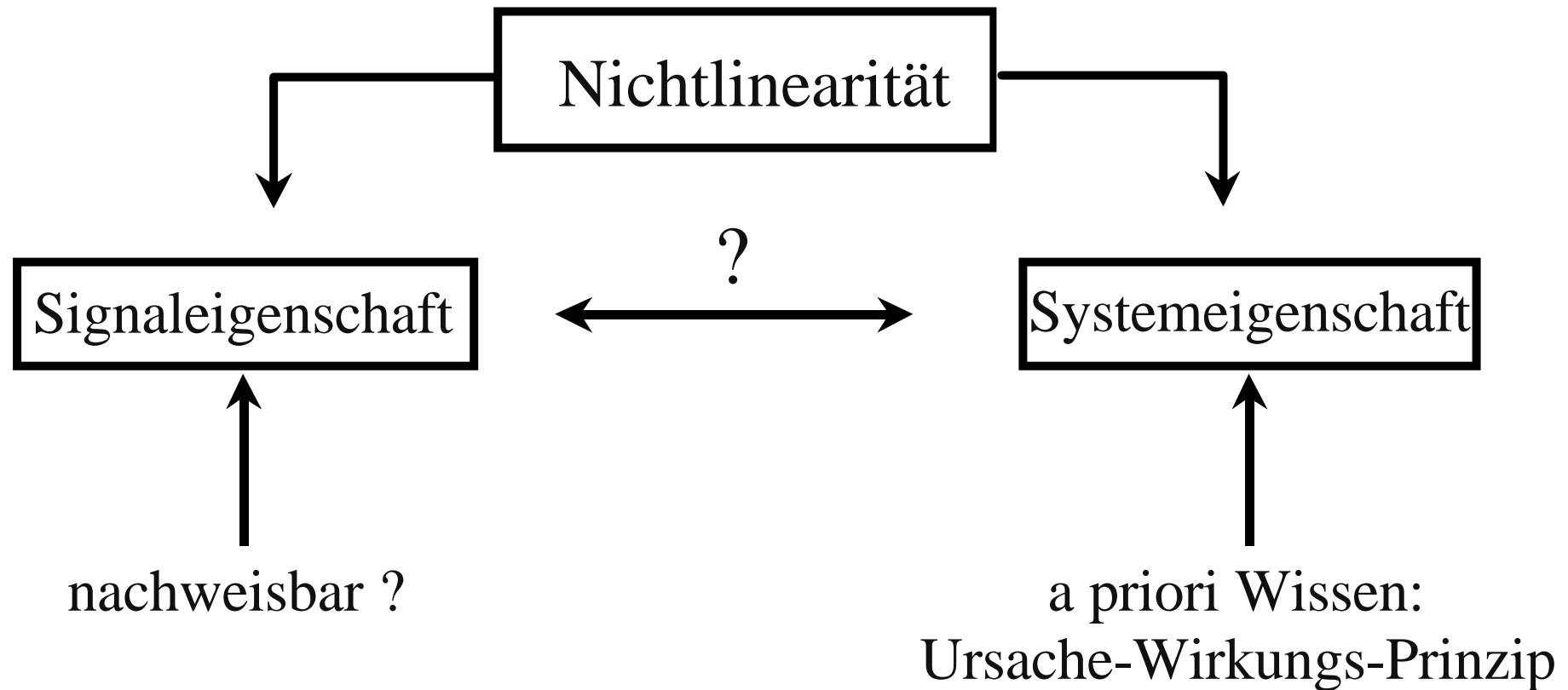
robuste Tests auf Nichtlinearität

Test auf Nichtlinearität

warum Test auf Nichtlinearität ?

- lineare Verfahren versagen oder erklären bestimmte Strukturen in den Daten nicht vollständig
- a priori Wissen: nichtlineares System;
 - Erwartungshaltung: Systemdynamik auch nichtlinear
 - gerechtfertigt ?
- Vermeidung von Fehlinterpretationen

Test auf Nichtlinearität



Ziel:

Unterscheidung zwischen nichtlinearer Dynamik und linearen Gaußschen stochastischen Prozessen

Test auf Nichtlinearität

einfache Tests

(A) viele Verfahren basieren auf stochastischen Modellen (AR, ARMA, etc.)
→ **Gaußsche Amplitudenverteilung**

- Abweichungen von Gaußscher Amplitudenverteilung erklärbar durch:

(1) lineare Dynamik mit nicht-Gaußscher Amplitudenverteilung
(Skewness, Kurtosis)

(2) lineare Dynamik, jedoch Beobachtung/Messung nichtlineare
statische Transformation → statische Nichtlinearität

(3) nichtlineare Dynamik

Test auf Nichtlinearität

einfache Tests

(B) Verlauf der Autokorrelationsfunktion (AKF)

langsamer Zerfall → Langzeitkorrelationen

↔ Nichtstationarität und/oder dynamische Nichtlinearität

falls stationär: typisch für $f^{-\alpha}$ -Spektrum mit $(0 < \alpha \leq 2)$

Hinweis für fraktale Dynamik (z.B. fraktionierte Brown'sche Bewegung)

- Test-Statistik

Hinweis auf Nichtlinearität, wenn $AKF(v_i^2) \neq (AKF(v_i))^2$

- (Fourierraum: Spektren höherer Ordnung)

Test auf Nichtlinearität

einfache Tests

(C) Zeitumkehrbarkeit (I)

reguläre lineare Prozesse trivial: $v(t) = v(-t)$

Erweiterung:

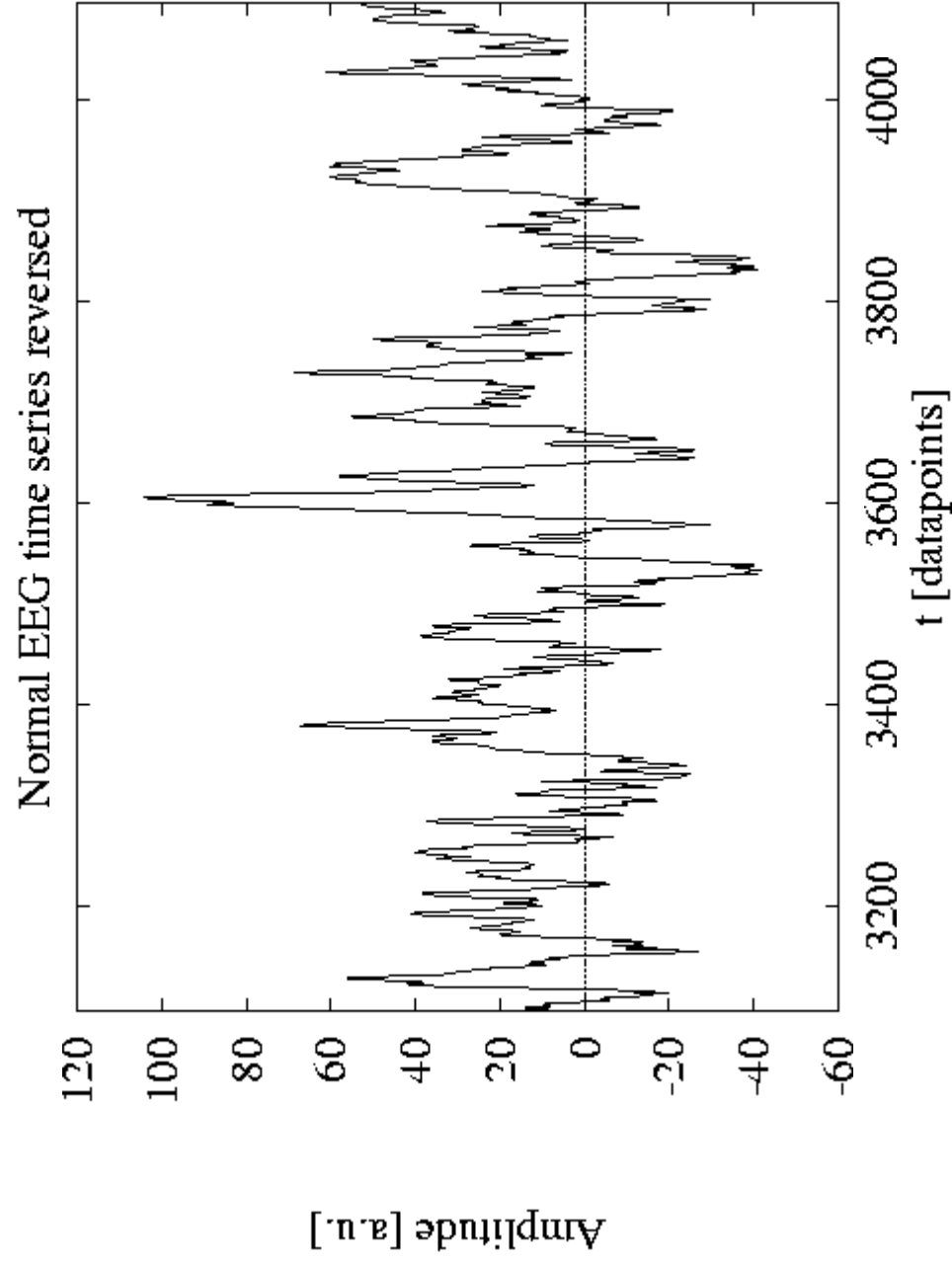
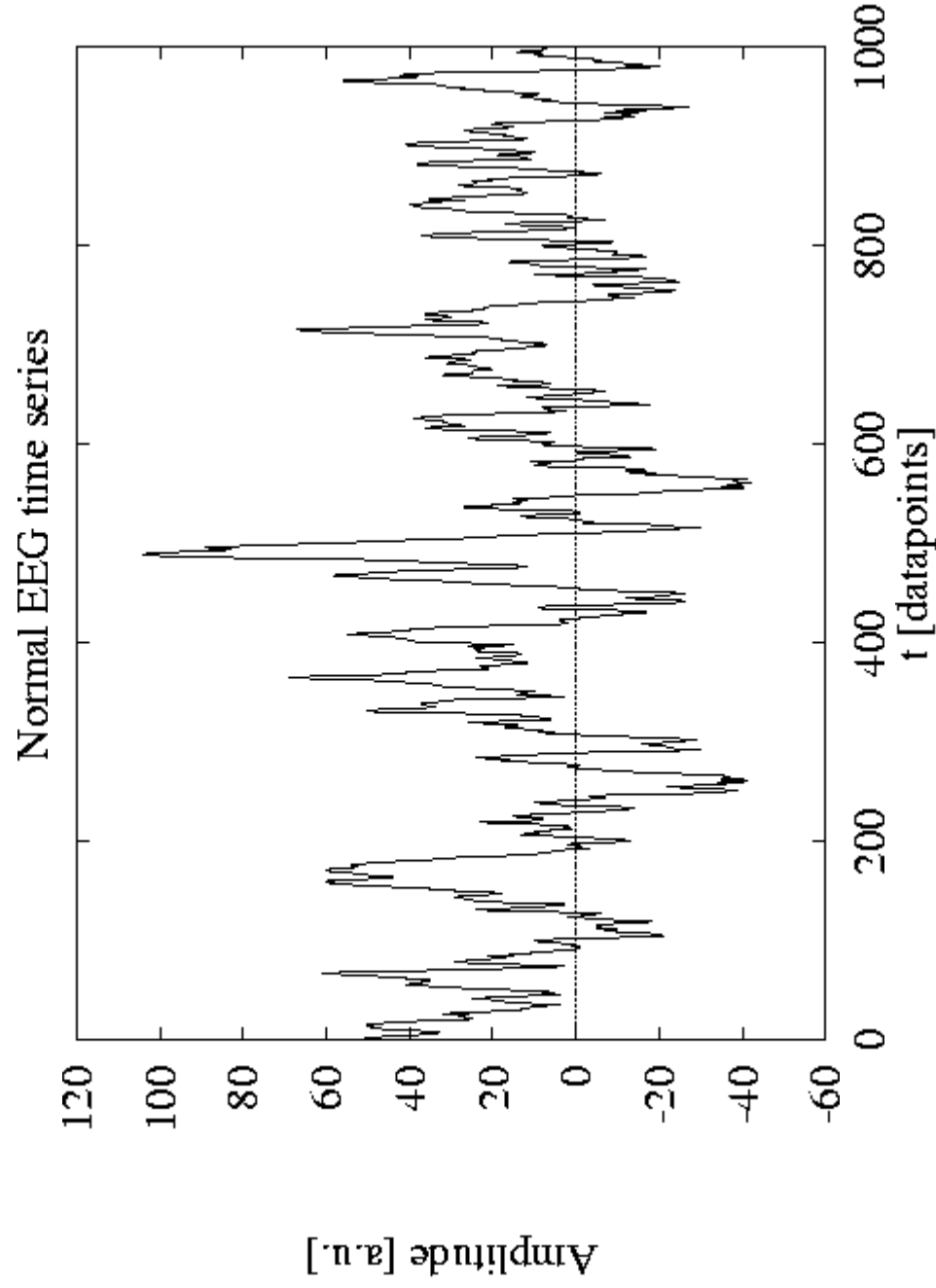
G. WEISS (J. Appl. Prob. 12, pp 831, 1975)

"Lineare Gaußsche stochastische Prozesse sind reversibel."

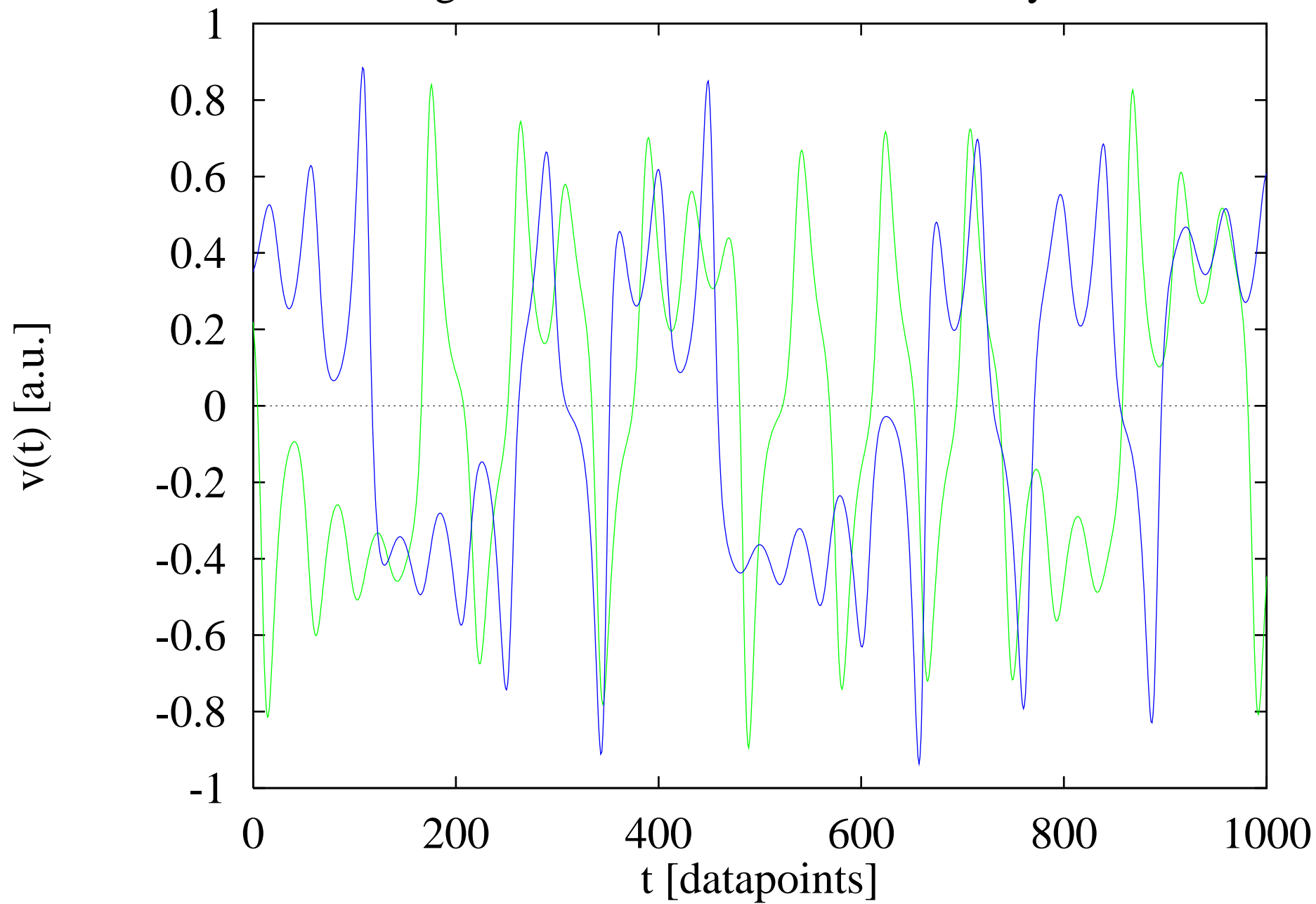
stochastischer Prozeß: geordnete Menge von Zufallsvariablen $\{Z_t, t \in T\}$
 $\{T\}$ Menge der Zeitpunkte, bei denen der Prozeß definiert ist

$$\Psi(Z_t) = \Psi(U^-(Z_t))$$

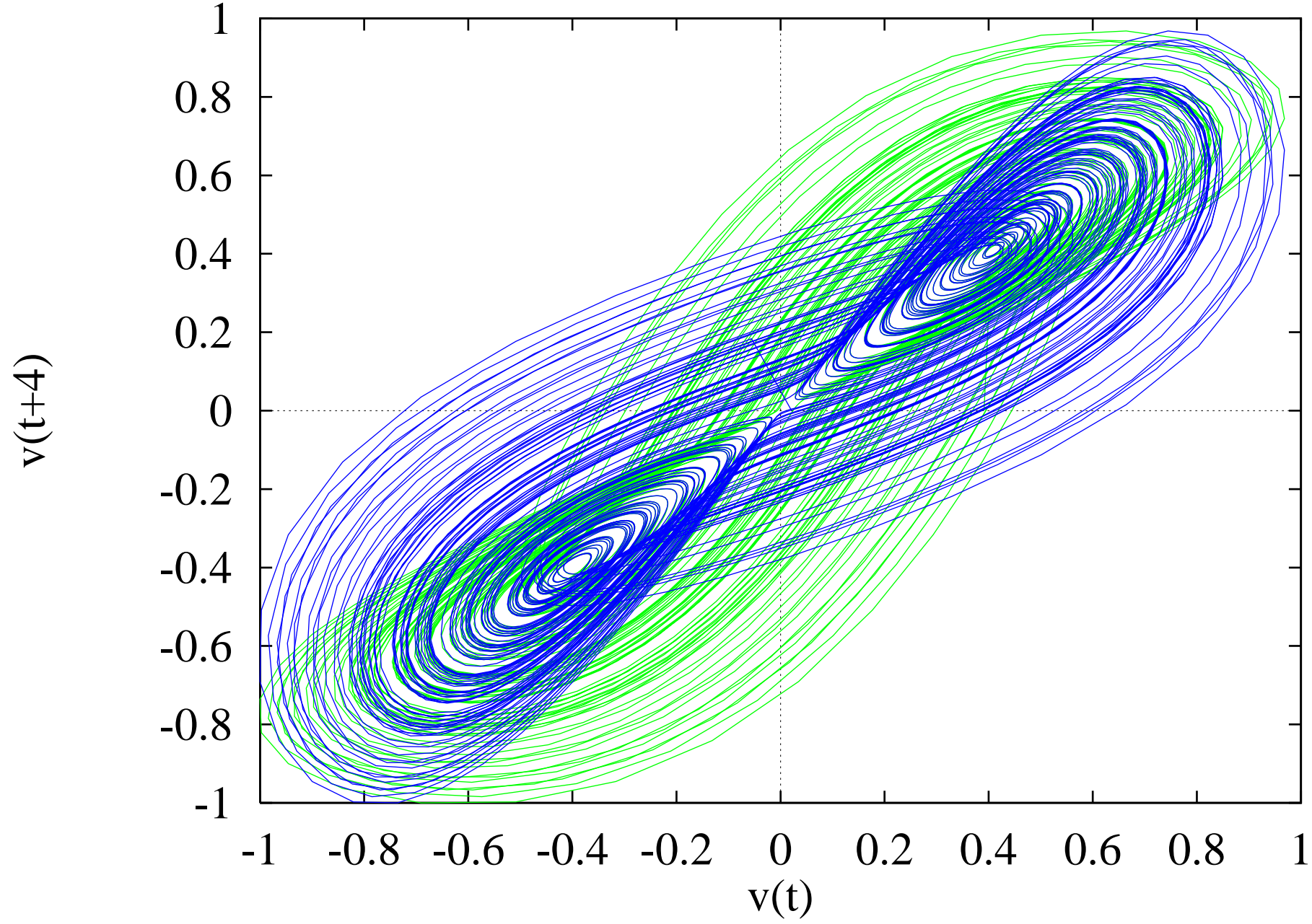
reversibel: gleiche Verbundwahrscheinlichkeiten Ψ nach Zeitumkehr



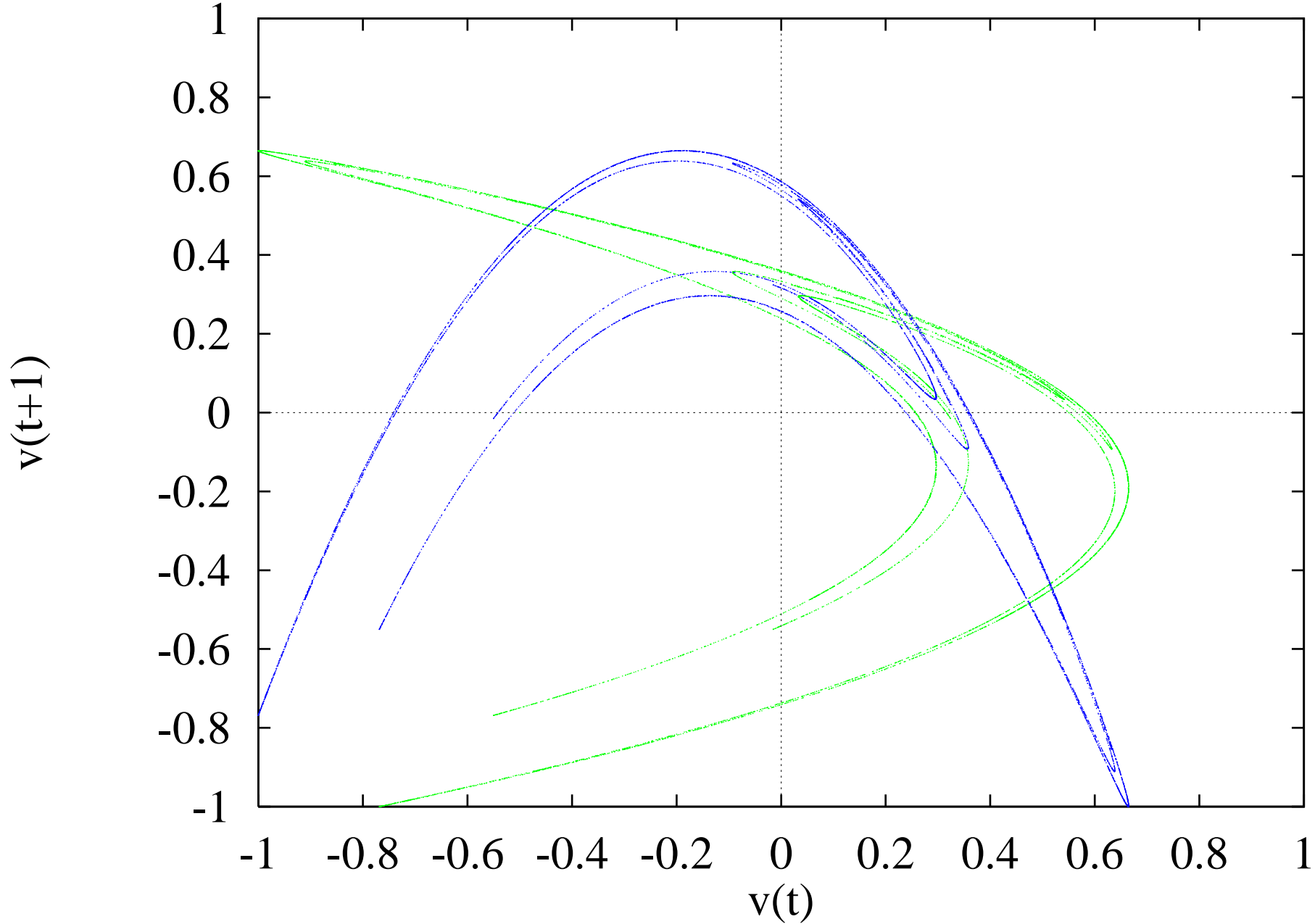
original and time-reversed Lorenz system



Phase space plot of original and time reversed Lorenz system, m



Phase space plot of original and time reversed Henon system



Test auf Nichtlinearität

einfache Tests

(C) **Zeitumkehrbarkeit (II)**

Umkehrung des Weiss'schen Satzes gilt nicht !!

- es gibt reversible nichtlineare Prozesse
- es gibt reversible nicht-Gaußsche lineare Prozesse

⇒

Verletzung der Zeitumkehrbarkeit *impliziert*, daß gegebene Zeitreihe kein linearer Gaußscher stochastischer Prozeß ist, der mittels einer statischen Transformation (die mit Zeitumkehroperator kommutiert) beobachtet wurde

Test auf Nichtlinearität

einfache Tests

(C) **Zeitumkehrbarkeit (III)**

einfache Test-Statistik:
$$\phi(\tau) = \frac{1}{N - \tau} \sum_{n=\tau+1}^N (v_n - v_{n-\tau})^3$$

Datensatz	$\phi(1)$
Weißes Rauschen	0,000
Hénon	-0,338
Lorenz	-0,002
normales EEG	-0,172
Patienten EEG	-6,240
Anfalls EEG	-214,024

Test auf Nichtlinearität

einfache Tests

bisherige Verfahren

- beschreiben im wesentlichen statische Eigenschaften, die durch das Leistungsspektrum gegeben sind
(Amplituden)
- Leistungsspektrum beinhaltet keine Information über Richtung der Zeit
(Phase)

Test auf Nichtlinearität

Phasenraumbasierte Tests: Zeitumkehrbarkeit

(Diks et al., Phys Rev E 53, pp2169, 1996; van der Heyden et al., Phys Lett A 216, pp283, 1996)

Sei $v(t)$ eine stationäre Zeitreihe und seien

$$\mathbf{v}(t) = (v(t), v(t-\tau), v(t-2\tau), \dots, v(t-(m-1)\tau))$$

geeignet gewählte m -dimensionale Phasenraumvektoren mit Zeitverzögerung τ

⇒

$v(t)$ heißt reversibel, wenn die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung $\rho(\mathbf{v})$ der Phasenraumvektoren unter der Zeitumkehrung für alle m und τ invariant ist

$$\rho(U^- \mathbf{v}) = \rho(\mathbf{v})$$

$$U^- : (v_t, v_{t+\tau}, \dots, v_{t+(m-1)\tau}) \rightarrow (v_{t+(m-1)\tau}, \dots, v_{t+\tau}, v_t)$$

Test auf Nichtlinearität

Phasenraumbasierte Tests:

Zeitumkehrbarkeit

Erstellung einer Test-Statistik:

betrachte Abstand zwischen Original- und zeitumgekehrter Verteilung:

$$Q = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i < j} w_{ij}$$

$$w_{ij} = \exp\left(-\frac{|\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j|^2}{d^2}\right) - \exp\left(-\frac{|\mathbf{v}_i - U^{-1}\mathbf{v}_j|^2}{d^2}\right)$$

d = Bandbreite des Abstandsschätzers, geeignet zu wählen
(z.B. 1-2fache Standardabweichung der Amplituden)

Test auf Nichtlinearität

Phasenraumbasierte Tests:

Zeitumkehrbarkeit

Erstellung einer Test-Statistik:

wenn Zeitreihe zeitumkehrbar $\rightarrow Q = 0$ mit Standardabweichung

$$\sigma = \frac{2}{N(N-1)} \sqrt{\left(\sum_{i < j} w_{ij}^2 \right)}$$

\Rightarrow Test-Statistik

$$S = \frac{Q}{\sigma}$$

normierte Statistik (Mittelwert 0; Standardabweichung 1)

Zeitumkehrbarkeit kann bei $S = 3$ mit $p = 0,05$ verworfen werden

Test auf Nichtlinearität

Phasenraumbasierte Tests

BDS-Test

W.A. Brock, W.D. Dechert, J.A. Scheinkman & B. LeBaron (1988), Dept.of Economics,
University of Wisconsin Press, Madison

Analyse von Börsenkursen:

- anfängliche Euphorie:

deterministisches Chaos in Börsenkursen ?

vorhersagbar ? stabilisierbar ? kontrollierbar ?

- heute eher nüchterne Sichtweise, jedoch Kurzzeitvorhersagen möglich

"[...] even if no scaling laws can be found, the information obtained by applying an algorithm usually used for estimating dimension can be very useful."

Test auf Nichtlinearität

Phasenraumbasierte Tests: BDS-Test

Einschränkung an Zeitreihe

- Spektrum nicht vollständig weiß

(typisch bei z.B. ökonomischen Daten)

→ Daten enthalten gewisse deterministische Struktur
(Korrelationen)

→ Modellierung mit AR/ARMA-Modellen niedriger
Ordnung ($p \approx 1-3$) nur unzureichend

→ Vorhersagbarkeit unzureichend

Frage: lineare oder nichtlineare Korrelationen ?

Test auf Nichtlinearität

Phasenraumbasierte Tests: BDS-Test

Idee:

betrachte Korrelationssumme

$$C_m(\varepsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N H(\varepsilon - |\mathbf{v}_m(i) - \mathbf{v}_m(j)|)$$

für unkorrelierte Daten (independent irregularly distributed-Prozesse)

$$C_m(\varepsilon) = [C_1(\varepsilon)]^m$$

jede Art von Korrelation impliziert:

$$C_m(\varepsilon) / [C_1(\varepsilon)]^m > 1$$

Test auf Nichtlinearität

Phasenraumbasierte Tests: BDS-Test

- Anwendung der BDS-Statistik nicht auf Originaldaten (Existenz von Korrelationen bekannt durch Spektrum)
- betrachte Residuen der AR-Modellanpassung

$$\varepsilon(t) = v(t) - a_0 - \sum_{l=1}^p a_l v(t-l)$$

- wenn AR-Modell sinnvolle Beschreibung:
 - Residuen unabhängig
 - BDS-Test positiv
 - lineare Korrelationen

Test auf Nichtlinearität

bisherige Verfahren:

Nichtlinearität entweder in Amplitudenverteilung oder in Phasenlage

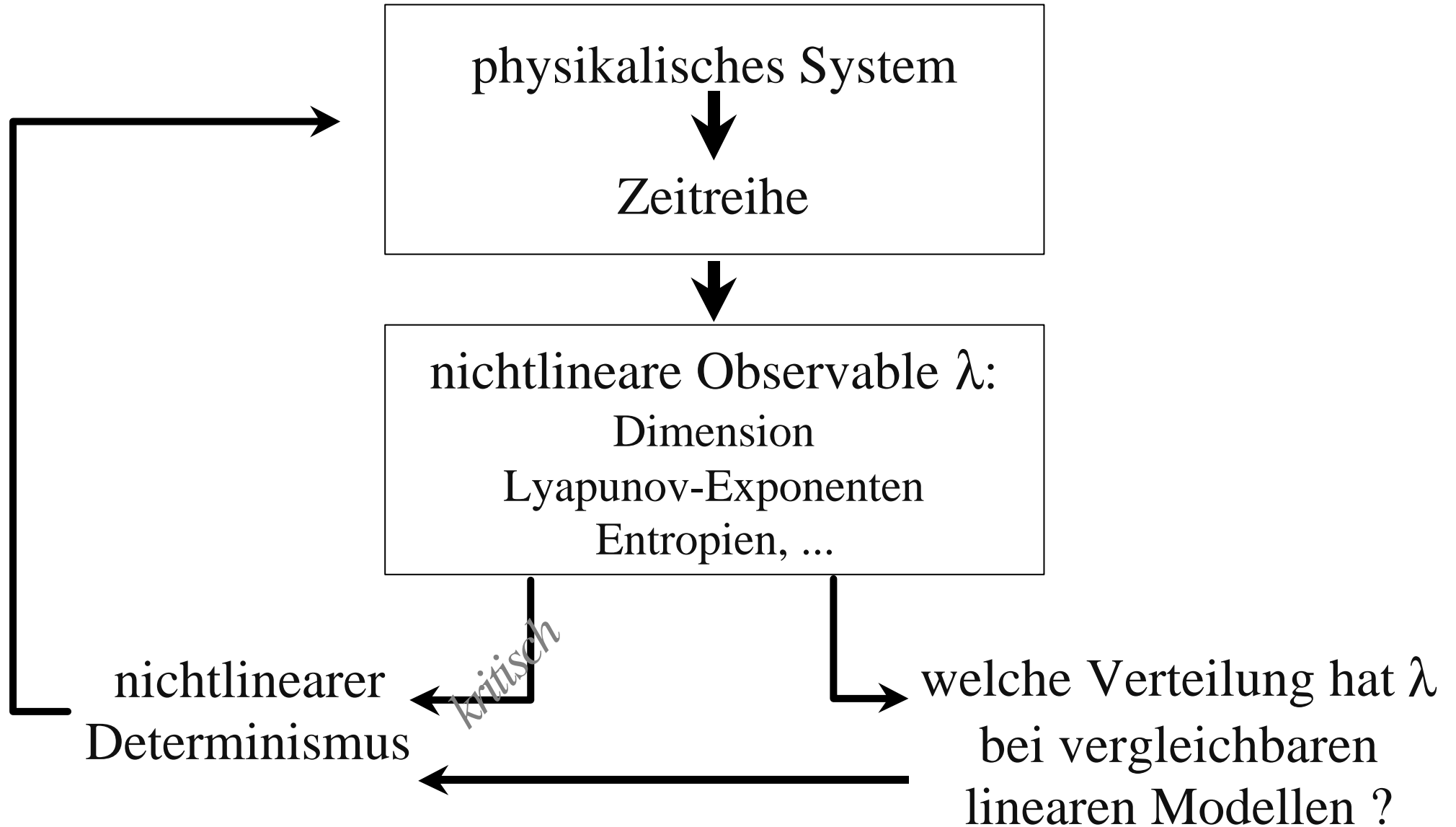
Nachteil

keine Aussage darüber, ob charakterisierende Maße tatsächlich *nichtlinearen Determinismus* beschreiben

aber: reine ja/nein Entscheidung nicht sinnvoll

besser: statistische Signifikanz der Hypothese, daß Daten durch lineares Modell erklärt werden können

Test auf Nichtlinearität



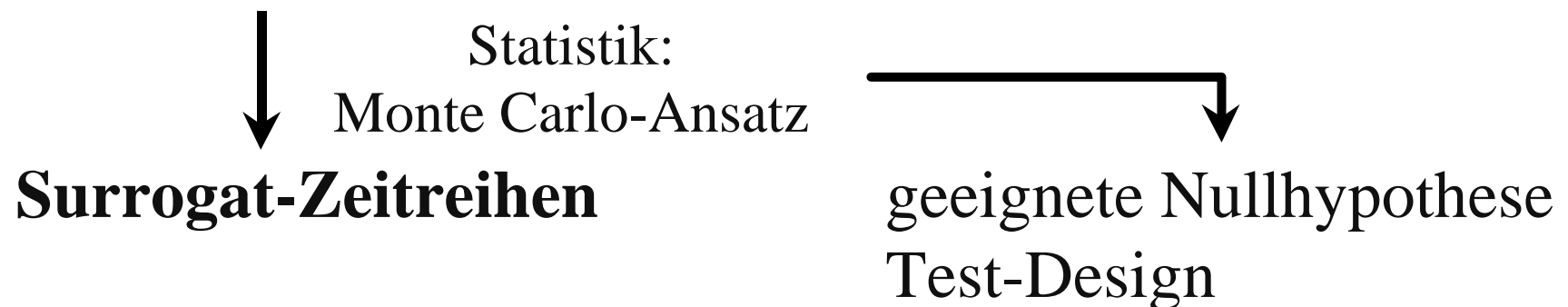
Test auf Nichtlinearität

2 PROBLEME:

- (1) Verteilung von λ für lineare stochastische Prozesse a priori nicht bekannt
- (2) nur **eine** einzelne (endliche) Zeitreihe gegeben

Idee:

vergleiche Zeitreihe mit anderen, die die **gleichen statistischen** Eigenschaften **außer** Nichtlinearität besitzen:



Test auf Nichtlinearität

Surrogat

- "Ersatzstoff"
- versucht Eigenschaften des Originals zu reproduzieren

Überprüfung einer speziellen Eigenschaft (z.B. Nichtlinearität)

- Eigenschaft darf im Surrogat nicht enthalten sein
- alle anderen Eigenschaften müssen vom Surrogat reproduziert werden

Test auf Nichtlinearität

Surrogate

Nullhypothese:

*Die Daten wurden von stationären, Gaußschen,
linearen stochastischen Prozeß generiert*

Test auf Nichtlinearität

Surrogate

Test-Design:

parametrische Methoden

- berechne $\hat{\lambda}$ für Test-Zeitreihe und Surrogat-Zeitreihen
- bestimme Mittelwert und Varianz für $\hat{\lambda}$ der Surrogat-Zeitreihen
- schätze Signifikanz über "Anzahl der Sigmas"

$$\text{Signifikanz} = \frac{\bar{\hat{\lambda}}_S - \lambda_T}{\sigma_{\lambda_S}}$$

Verfahren nicht zu empfehlen: λ gaußverteilt vorausgesetzt !!

Test auf Nichtlinearität

Surrogate

Test-Design:

besser: **robuste Statistik** (z.B. Rang-Ordnung-Test)

- wähle Wahrscheinlichkeit α , Nullhypothese falsch zu verwerfen
- Signifikanzniveau $(1-\alpha) \times 100 \%$

- einseitiger Test (z.B. nur *ein* Wert von λ interessant)
 - generiere $M=(1/\alpha-1)$ Surrogate
 - Wahrscheinlichkeit, daß Daten durch Zufall den Wert λ einnehmen, ist α

- zweiseitiger Test (z.B. Max. und Min. von λ interessant)
 - generiere $M=(2/\alpha-1)$ Surrogate
 - Wahrscheinlichkeit, daß Daten durch Zufall *entweder* $\text{Max}(\lambda)$ *oder* $\text{Min}(\lambda)$ einnehmen, ist α

Test auf Nichtlinearität

robuste Test-Statistik mit Surrogaten

Signifikanzniveau
(1- α)x100%

M=1/ α -1 Surrogate (einseitig)

M=2/ α -1 Surrogate (zweiseitig)

(M=19 bzw. 39 für 95 % Sign.Niv.)

Original-
Zeitreihe

geeignete
Teststatistik

Dimension,
Lyapunov-Exponent,
Entropie, etc

unterschiedlich ? →

Nichtlinearität bzgl. Nullhypothese nachweisbar

Test auf Nichtlinearität

Erstellung von Surrogaten

typische Realisationen

- schwierig: erfordern **explizite** Modellgleichungen
- Modellparameter aus Zeitreihe extrahieren
- Surrogate via Monte-Carlo Realisationen

Test auf Nichtlinearität

Erstellung von Surrogaten

bedingte Realisationen:

(bootstrapping, keine Modellanpassung notwendig !)

- "random shuffling"
- Phasenrandomisierung unter Erhaltung des Amplitudenspektrums
- amplitudenangepaßte phasenrandomisierte Surrogate
- iterativ amplitudenangepaßte phasenrandomisierte Surrogate

Test auf Nichtlinearität

Erstellung von Surrogaten: "*random shuffling*"

- Anwendungsgebiet: fast-periodische Daten
- Nullhypothese:
keine nichtlineare deterministische Struktur in Zyklusvariabilität der Originaldaten
- typische Muster bleiben unverändert
- Beispiele: Sonnenflecken, Anfalls-EEG, EKG

Test auf Nichtlinearität

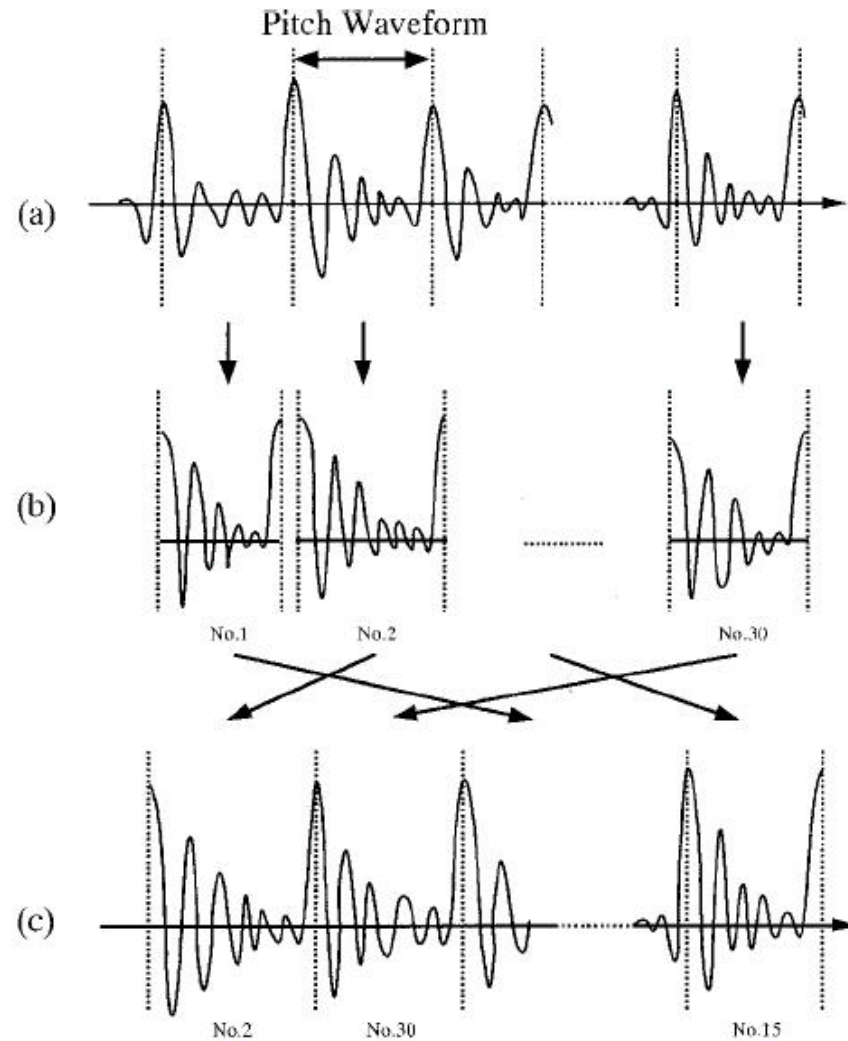


FIG. 5. Method of creating spike-and-wave surrogate data. (a), (b) Divide the original speech signal into pitch-waveform patterns by cutting the signal at maximal peak amplitudes. (c) Shuffle the pitch-waveforms and reconnect them with each other in random order.

Test auf Nichtlinearität

Erstellung von Surrogaten: *Phasenrandomisierte Surrogate (FT)*
(Theiler et al., 1992, Pijn et al., 1991)

- **Nullhypothese:**

linearer, stochastischer Prozeß mit gaußverteilten Amplituden

- **Vorgehensweise:**

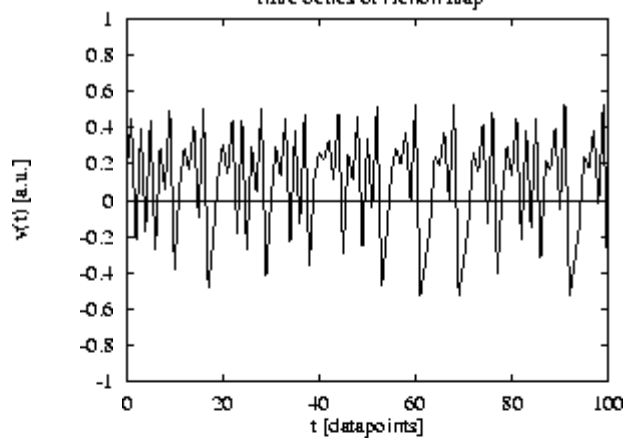
(1) Fourier-Transformation der Original-Zeitreihe

(2) ersetze Phasen durch Zufallszahlen $\psi \in [0, 2\pi)$

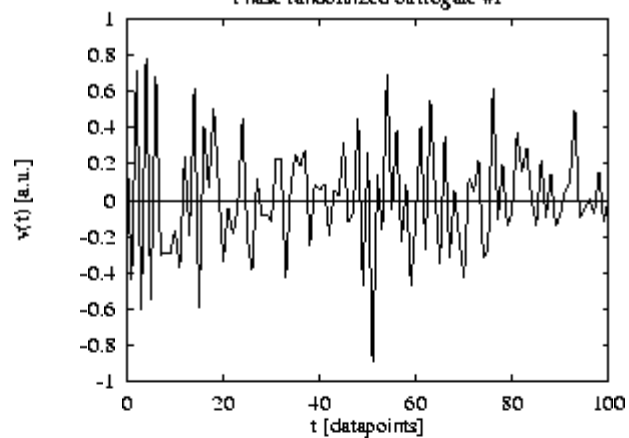
(Amplitudenspektrum bleibt erhalten)

(3) inverse Fourier-Transformation

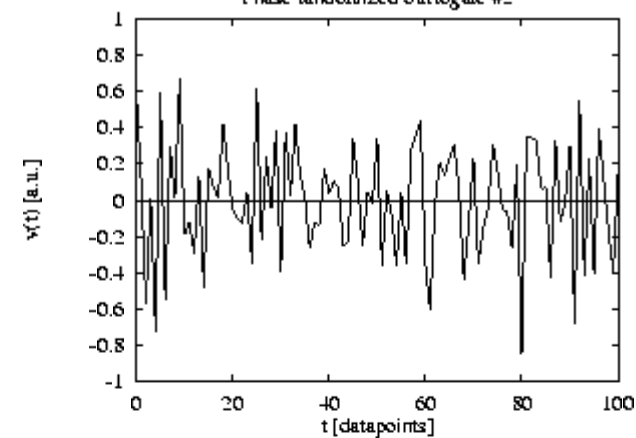
Time Series of Henon map



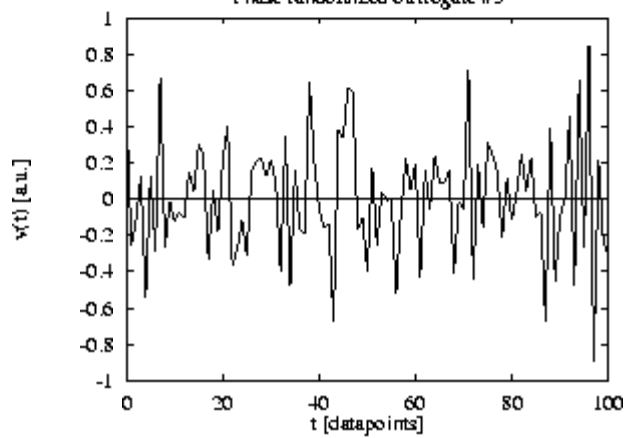
Phase randomized Surrogate #1



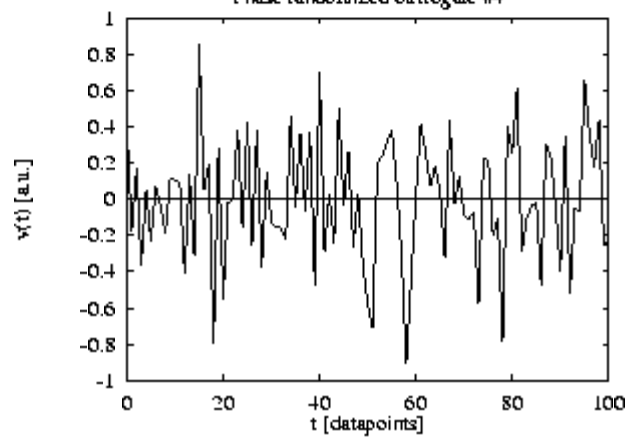
Phase randomized Surrogate #2



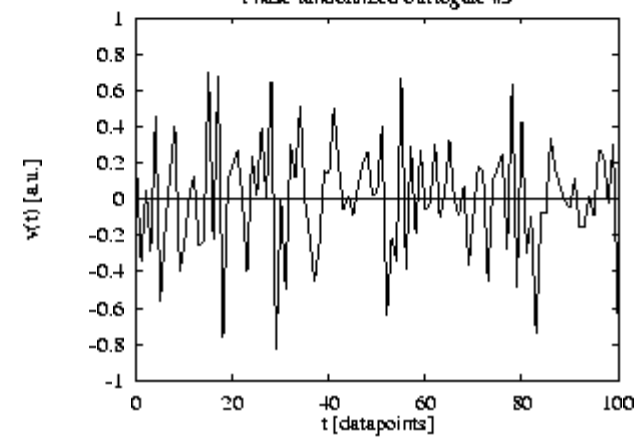
Phase randomized Surrogate #3



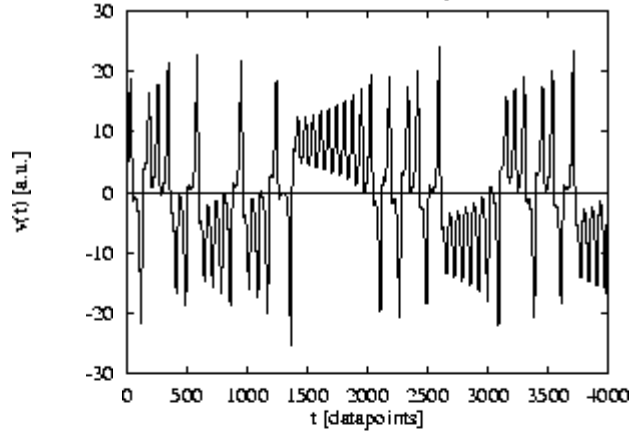
Phase randomized Surrogate #4



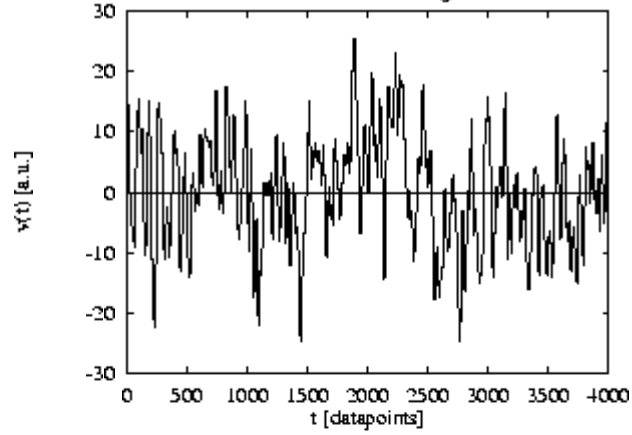
Phase randomized Surrogate #5



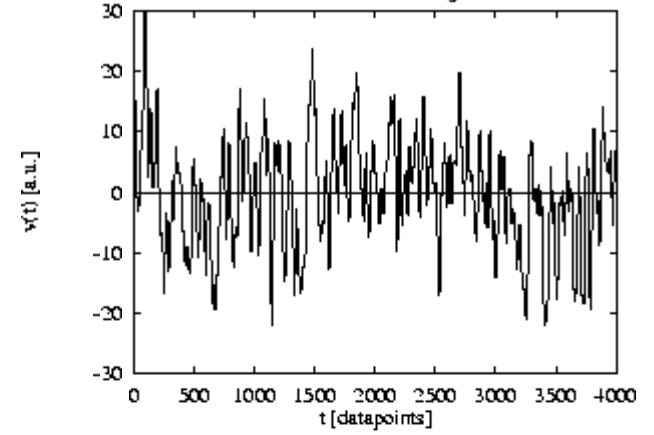
Time Series of Lorenz system



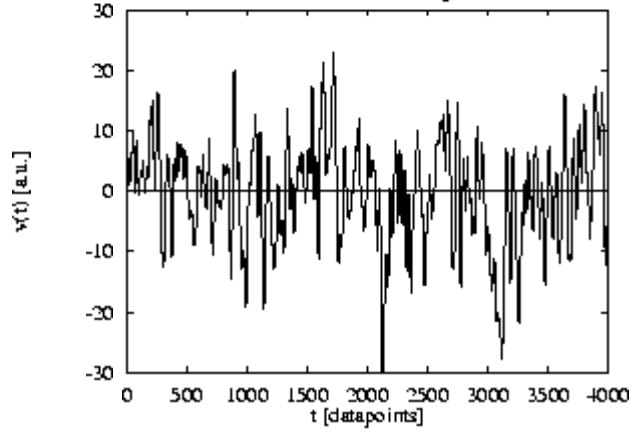
Phase randomized Surrogate #1



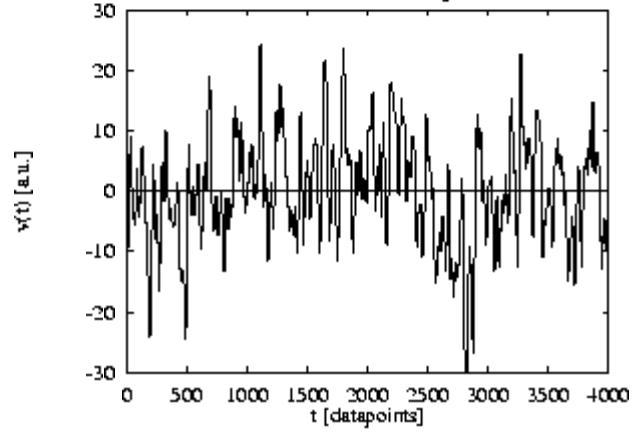
Phase randomized Surrogate #2



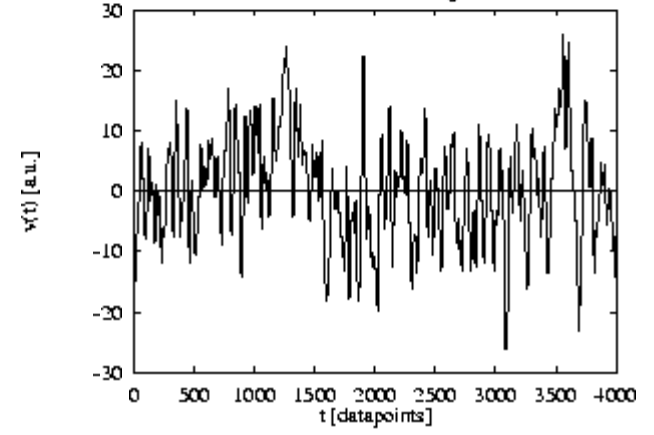
Phase randomized Surrogate #3



Phase randomized Surrogate #4



Phase randomized Surrogate #5



Test auf Nichtlinearität

Erstellung von Surrogaten: *Phasenrandomisierte Surrogate (FT)*

Eigenschaften:

- Amplituden der Leistungsspektren von Original und Surrogaten gleich
⇒ (mit Wiener-Khinchin-Theorem):
Autokorrelationsfunktionen gleich
- Mittelwert und Standardabweichung der Amplitudenverteilungen identisch
- aber: Form der Amplitudenverteilung kann variieren
- FT-Surrogate haben gaußsche Amplitudenverteilung !!

Test auf Nichtlinearität

Erstellung von Surrogaten:

Amplitudenangepaßte Phasenrandomisierte Surrogate (AAFT)

(Theiler et al., 1992)

- **Nullhypothese:**

linearer, stochastischer Prozeß mit beliebiger Amplitudenverteilung

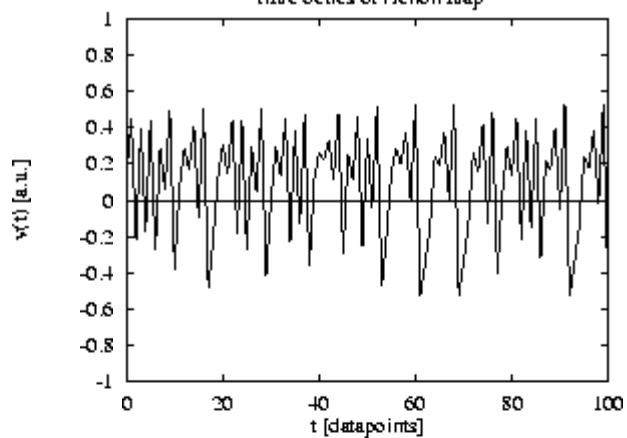
- **Vorgehensweise:**

(1) erzeuge gaußverteilte Zufallsfolge, reskaliere Amplituden über Rangordnung der Originalamplituden

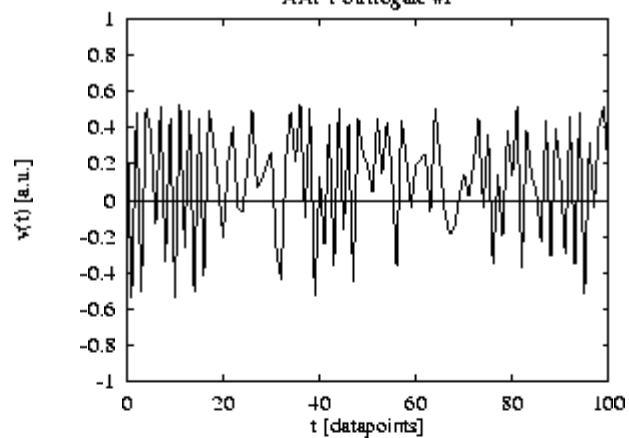
(2) erzeuge FT-Surrogat aus der Zufallsfolge (hat gaußverteilte Amplituden !!)

(3) Umordnen der Amplituden des Originals über Rangordnung des FT-Surrogates

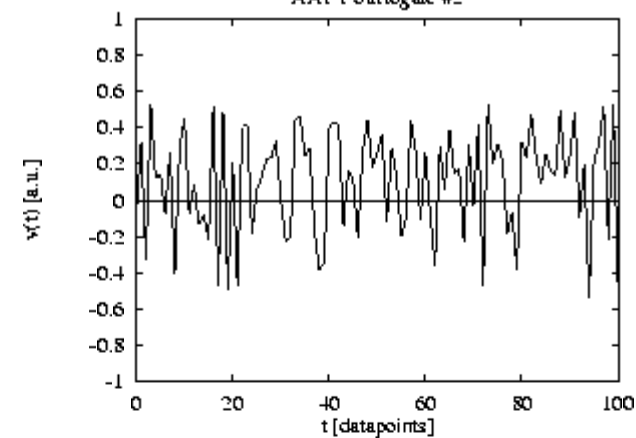
Time Series of Henon map



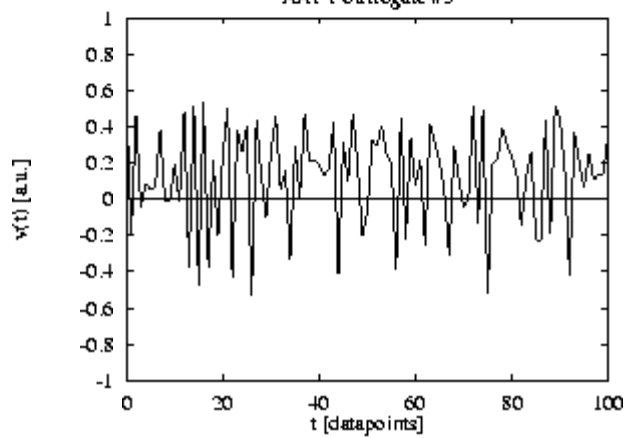
AAFT Surrogate #1



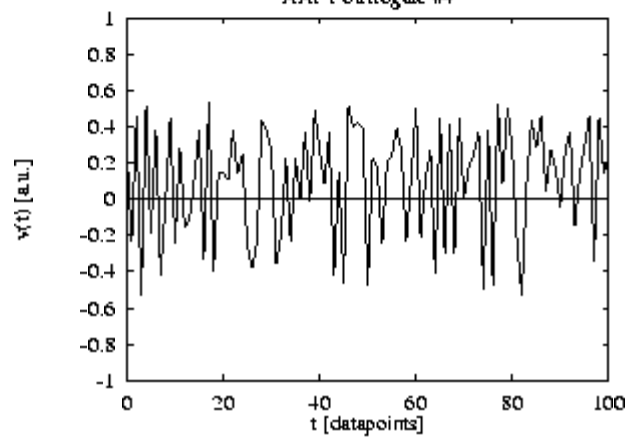
AAFT Surrogate #2



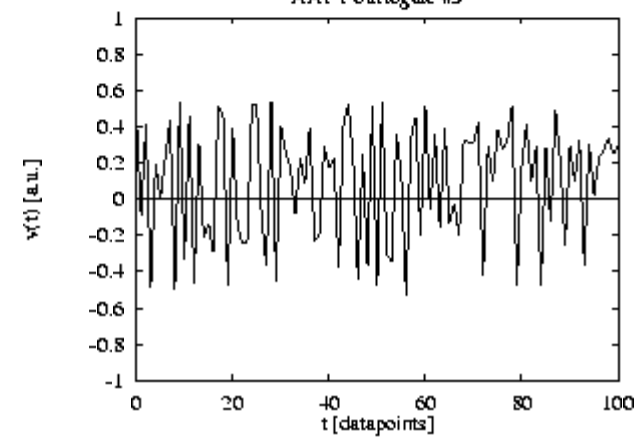
AAFT Surrogate #3



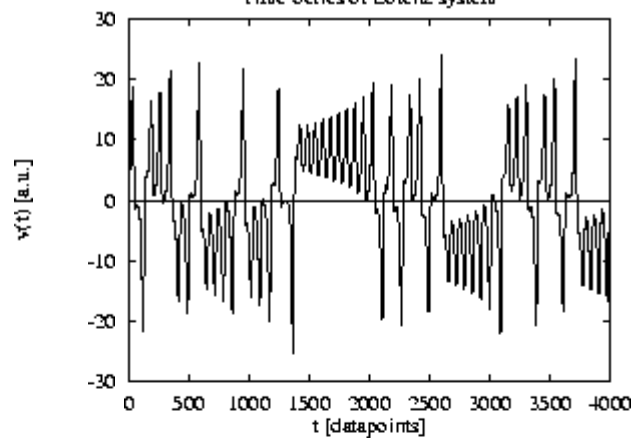
AAFT Surrogate #4



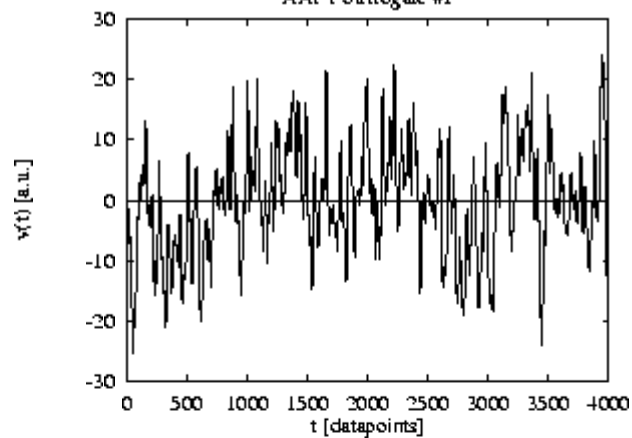
AAFT Surrogate #5



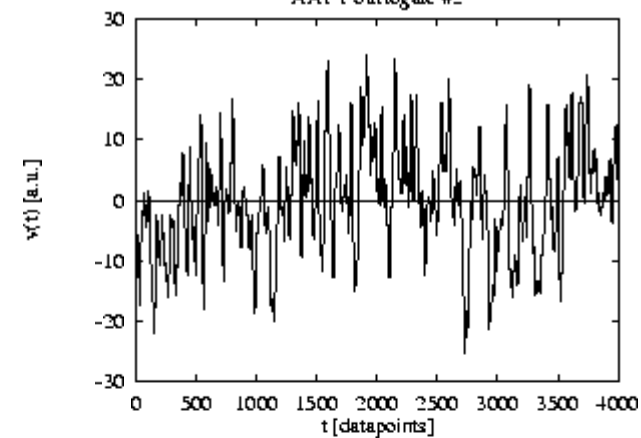
Time Series of Lorenz system



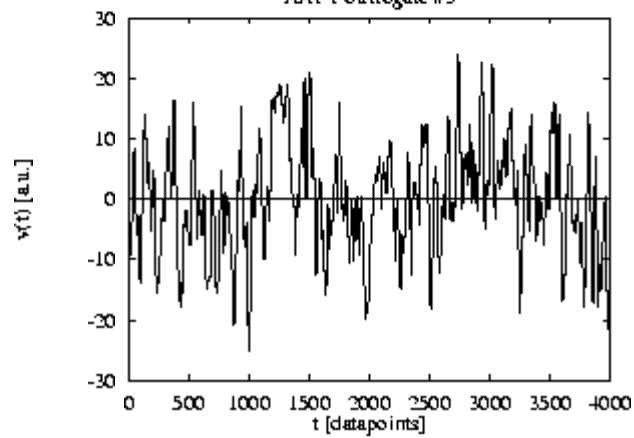
AAFT Surrogate #1



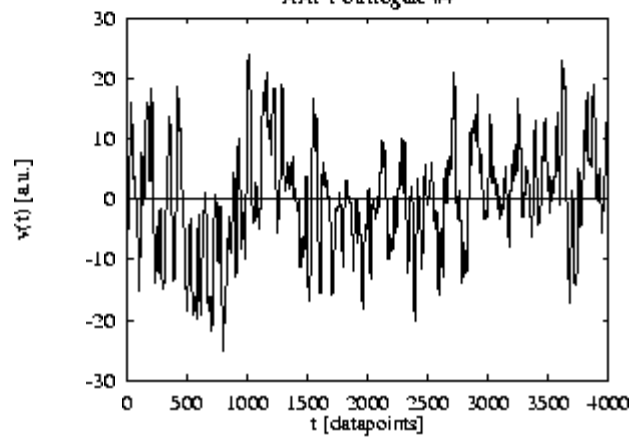
AAFT Surrogate #2



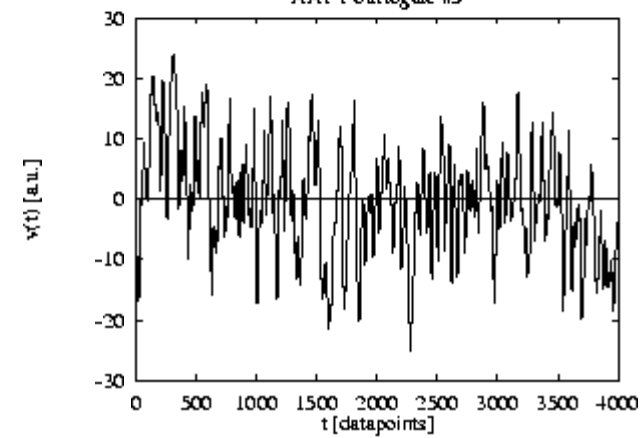
AAFT Surrogate #3



AAFT Surrogate #4



AAFT Surrogate #5



Test auf Nichtlinearität

Erstellung von Surrogaten:

Amplitudenangepaßte Phasenrandomisierte Surrogate (AAFT)

Eigenschaften

- wie FT-Surrogate, jedoch Amplitudenverteilung optimal an Original angepaßt
- jedoch: Anpassung an Leistungsspektrum nur optimal bei:
 $N \rightarrow \infty$ und schwach korrelierten Daten
- Problem bei kurzen Datensätzen mit starken Korrelationen:

AAFT generieren zu flaches (nahezu weißes) Spektrum

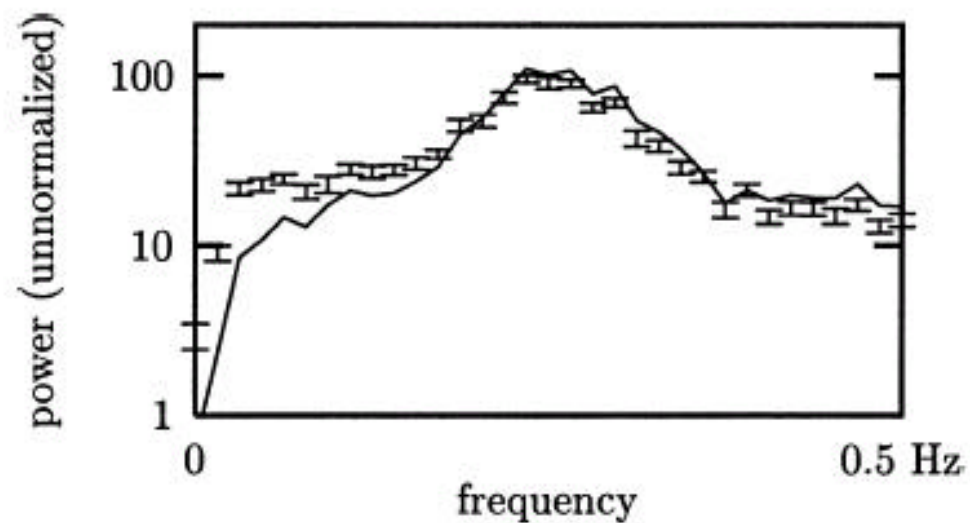


Fig. 3. Discrepancy of the power spectra of human breath rate data (solid line) and 19 AAFT surrogates (dashed lines). Here the power spectra have been computed with a square window of length 64.

Test auf Nichtlinearität

Erstellung von Surrogaten:

Iterative Amplitudenangepaßte Phasenrandomisierte Surrogate (IAAFT) (Schreiber & Schmitz, 1996)

- **Erweiterung der FT- und AAFIT-Surrogate:**
gleichmäßige Anpassung von Leistungsspektrum **und** Amplitudenverteilung
- **Nullhypothese:**
linearer, stochastischer Prozeß mit beliebiger Amplitudenverteilung

Test auf Nichtlinearität

Erstellung von Surrogaten:

Iterative Amplitudenangepaßte Phasenrandomisierte Surrogate (IAAFT) (Schreiber & Schmitz, 1996)

- **Vorgehensweise:**

- (1) Leistungsspektrum des Originals
- (2) erzeuge Zufallsfolge durch Permutation der Originalamplituden (gleiche Amplitudenverteilung, zufällige Phasen)
- (3) Anpassung des Leistungsspektrums der Zufallsfolge an (1) (ersetze Amplituden, nicht Phasen) und Rücktransformation
- (4) Anpassung der Amplitudenverteilung des Surrogats durch Reskalierung über Rangordnung der Originalamplituden
- (5) wiederhole ab (3) n -mal (geeignete Abbruchbedingung)

Test auf Nichtlinearität

Erstellung von Surrogaten:

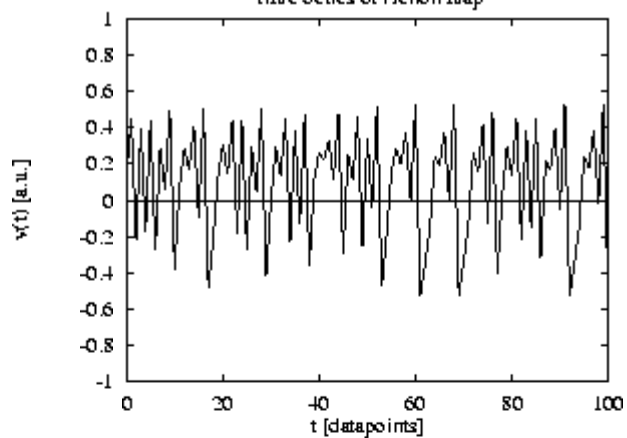
Iterative Amplitudenangepasste Phasenrandomisierte Surrogate (IAAFT) (Schreiber & Schmitz, 1996)

- **Wahl einer geeigneten Abbruchbedingung:**

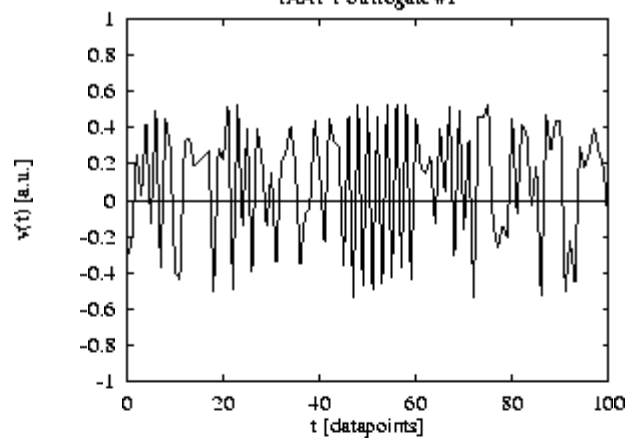
z.B. Differenz zwischen den Spektren nach i Iterationen:

$$\Delta^{(i)} = \sum_{k=1}^{N_{Nyq}} \frac{\left(S_k^{(i)} - O_k \right)^2}{O_k^2}$$

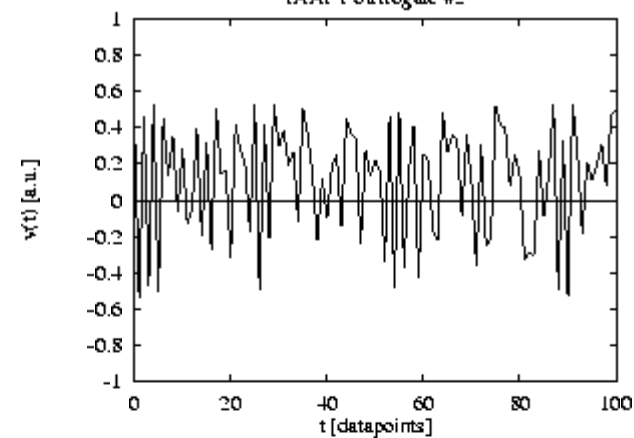
Time Series of Henon map



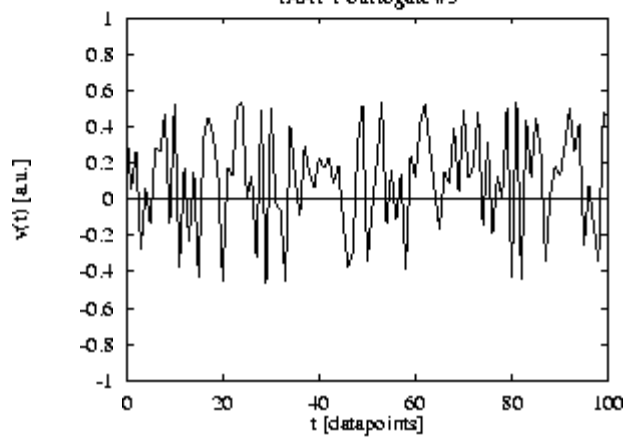
1AAFT Surrogate #1



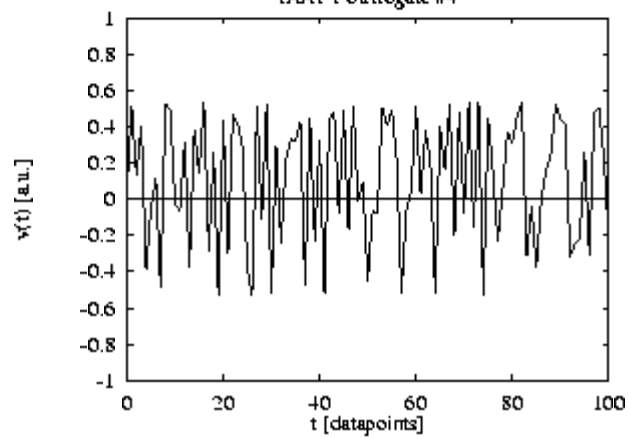
1AAFT Surrogate #2



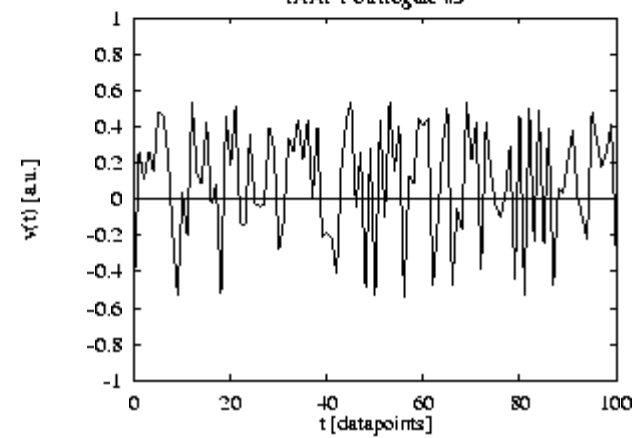
1AAFT Surrogate #3



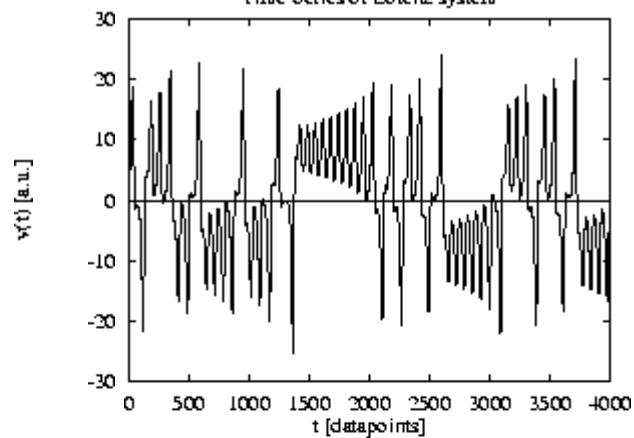
1AAFT Surrogate #4



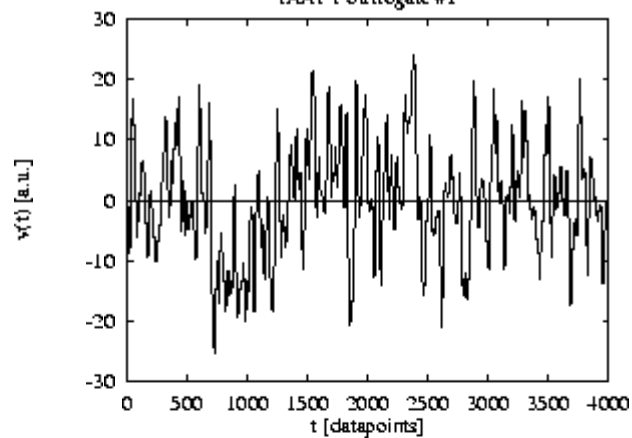
1AAFT Surrogate #5



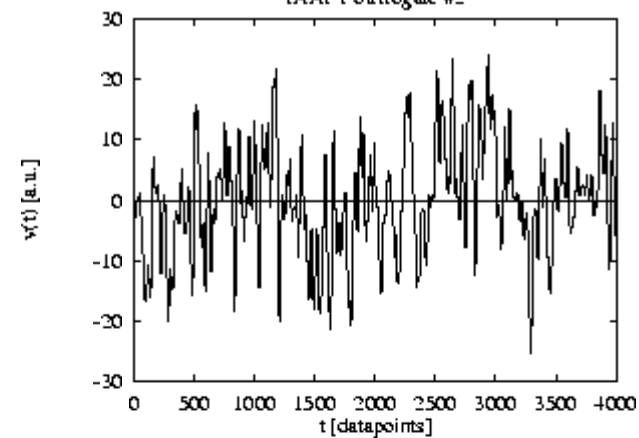
Time Series of Lorenz system



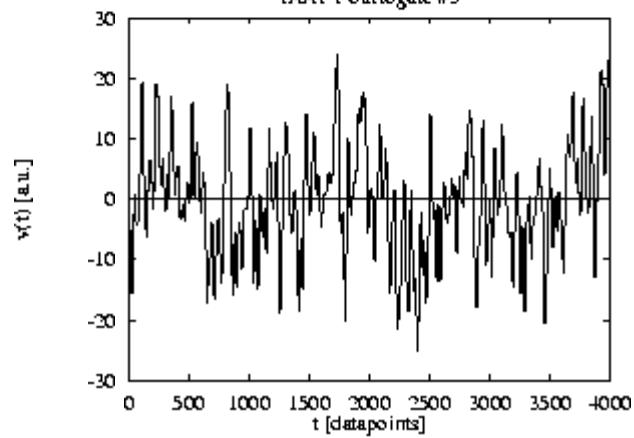
1AAFT Surrogate #1



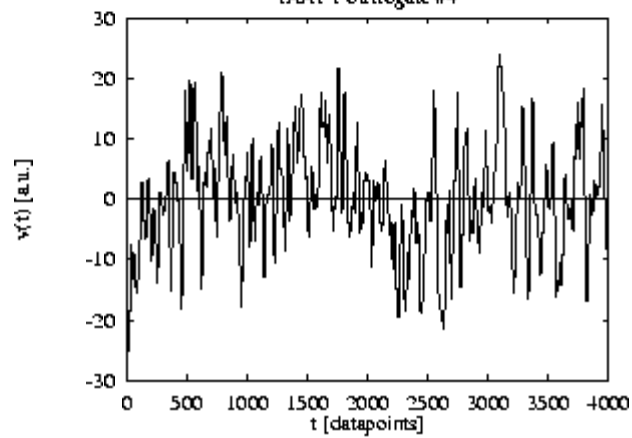
1AAFT Surrogate #2



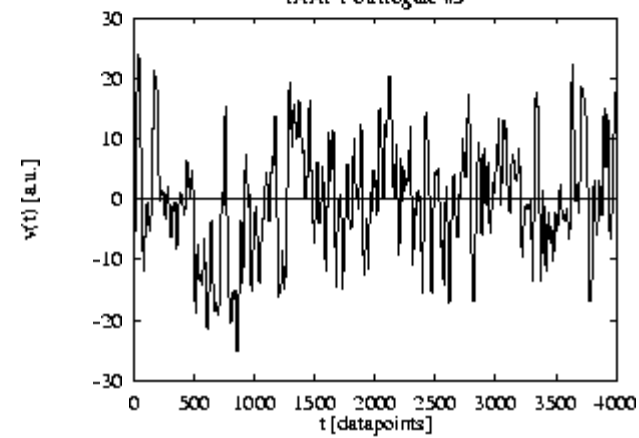
1AAFT Surrogate #3



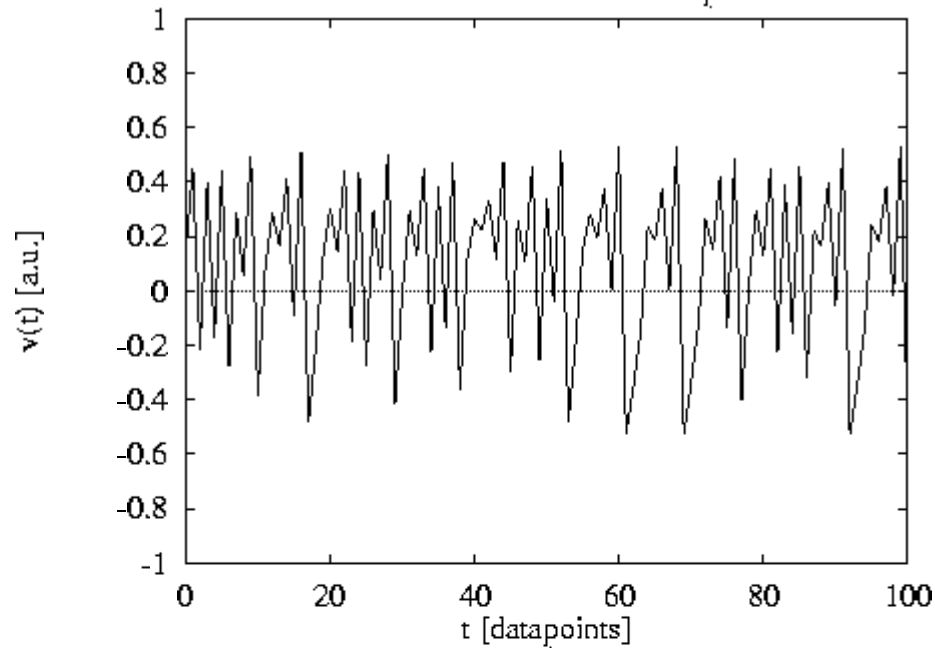
1AAFT Surrogate #4



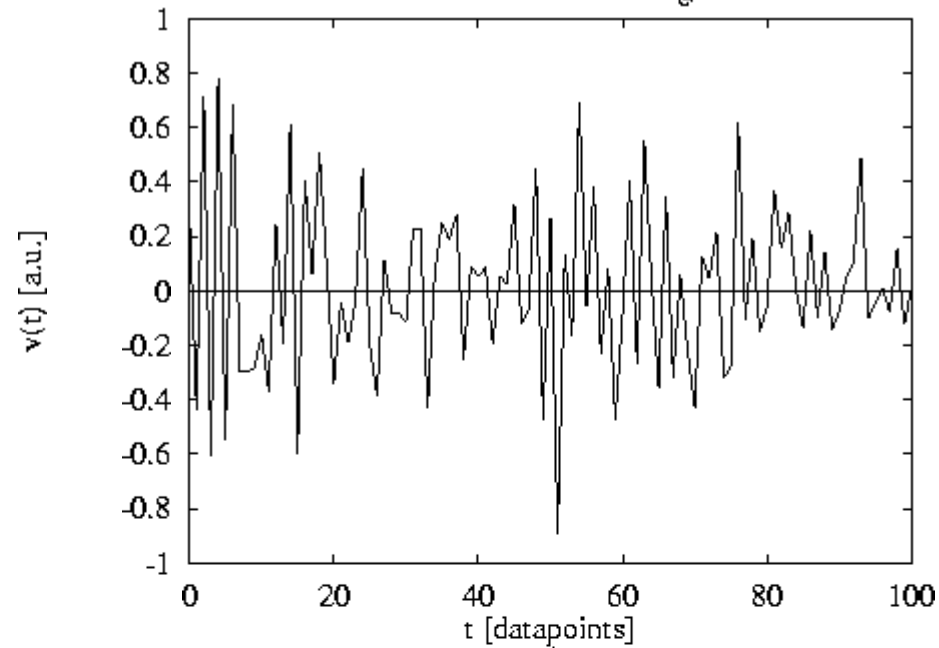
1AAFT Surrogate #5



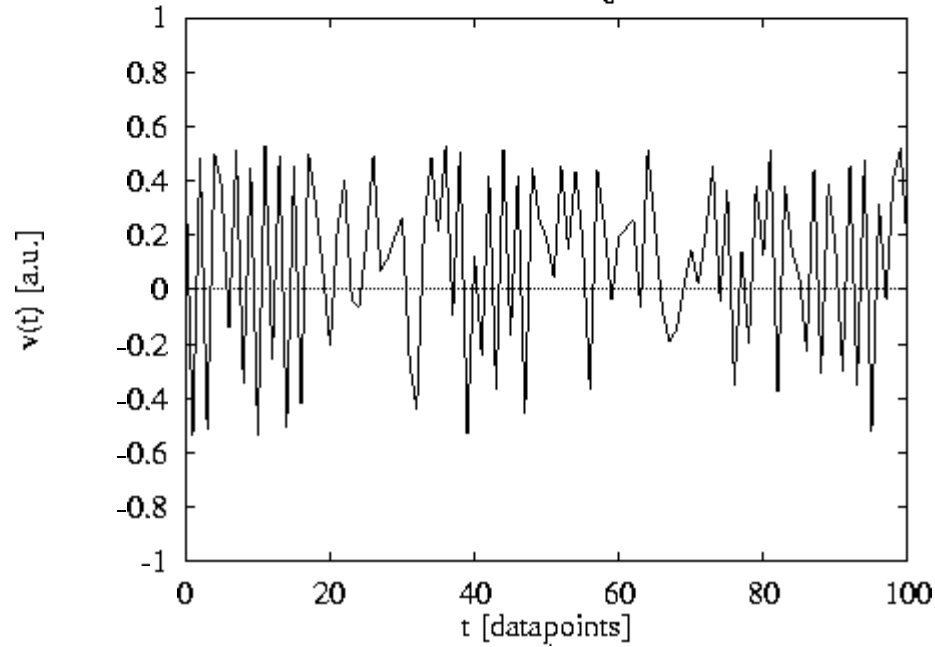
Time Series of Henon map



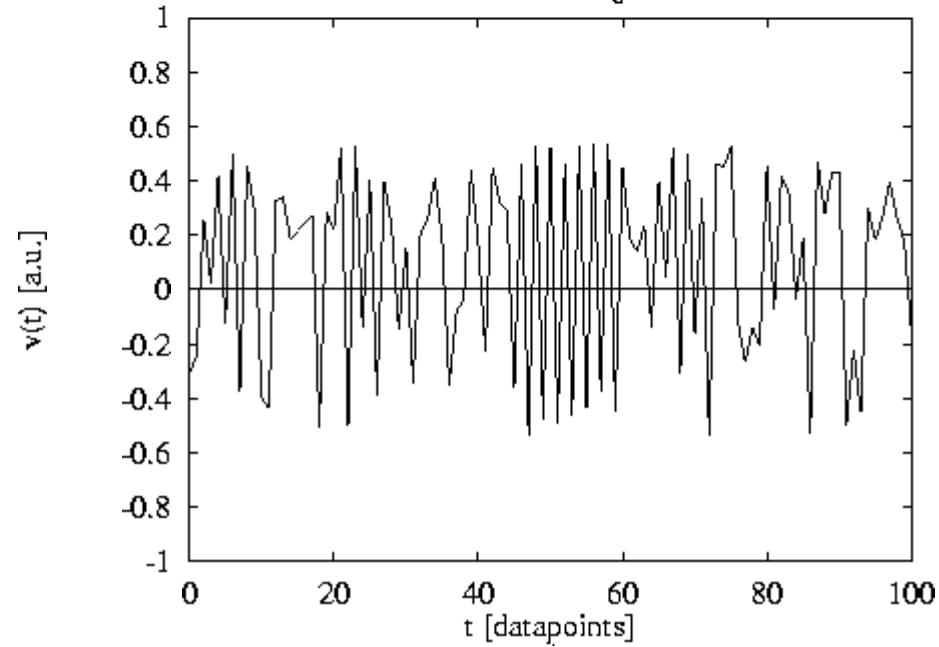
Phase randomized Surrogate

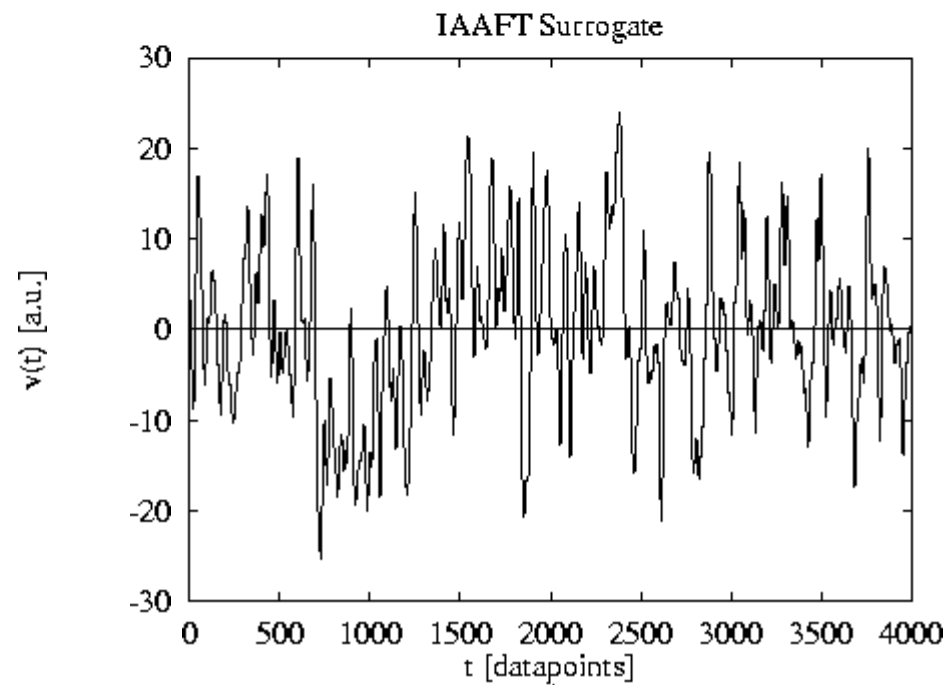
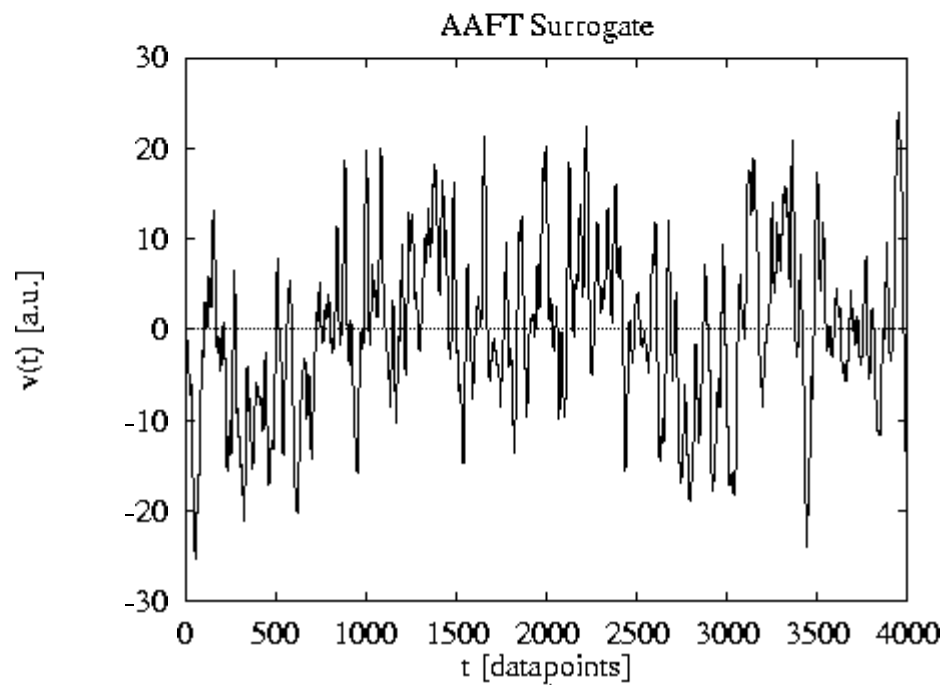
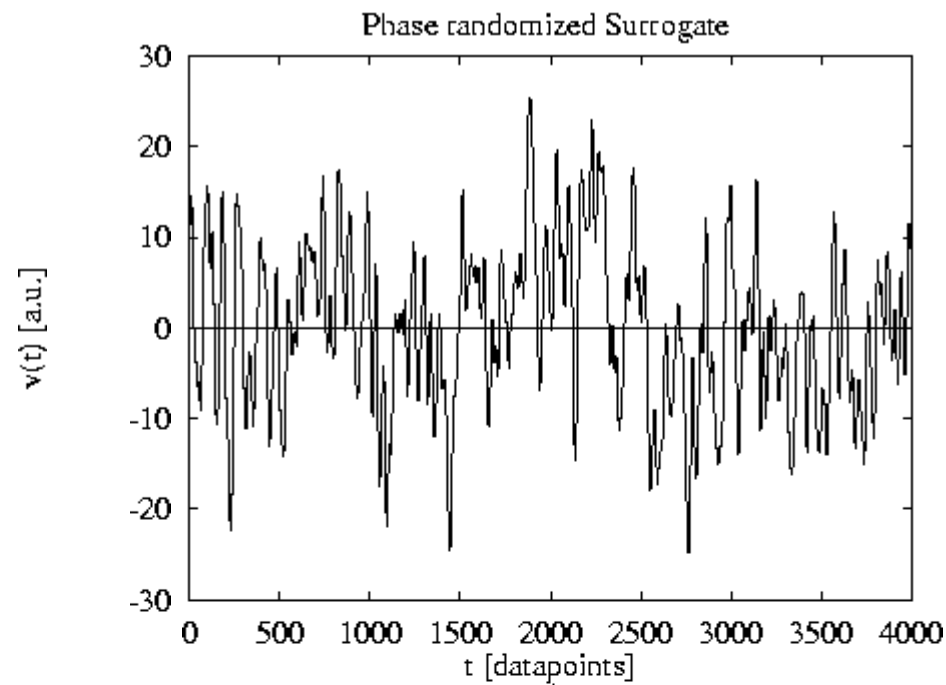
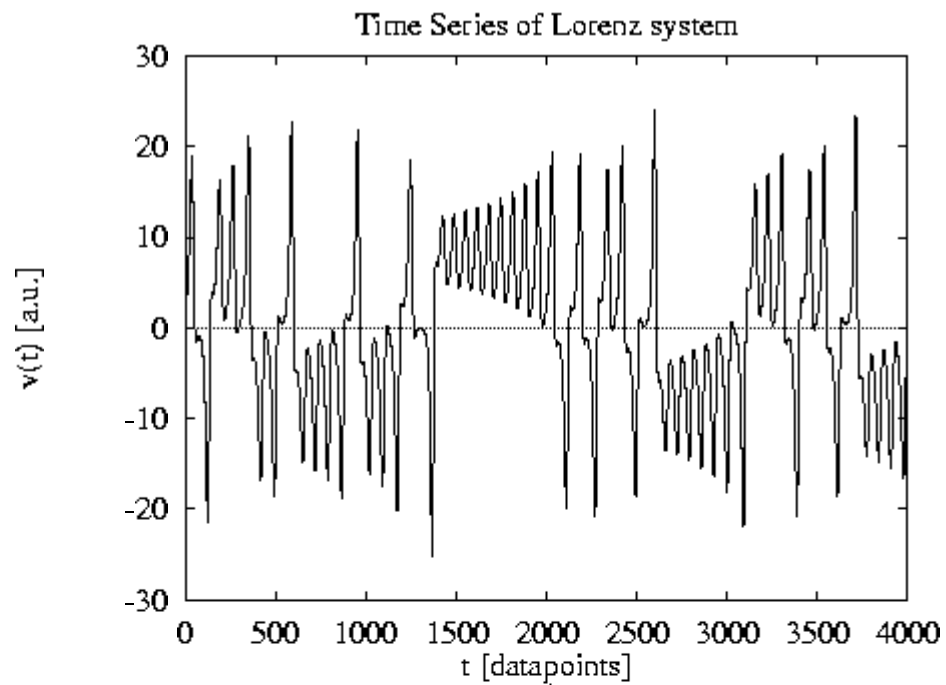


AAFT Surrogate

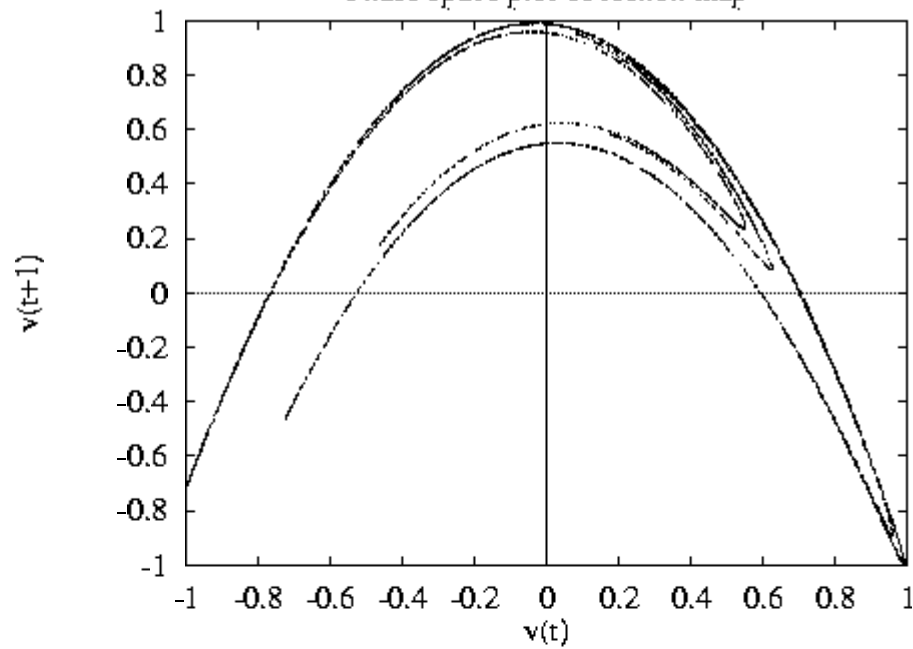


IAAFT Surrogate

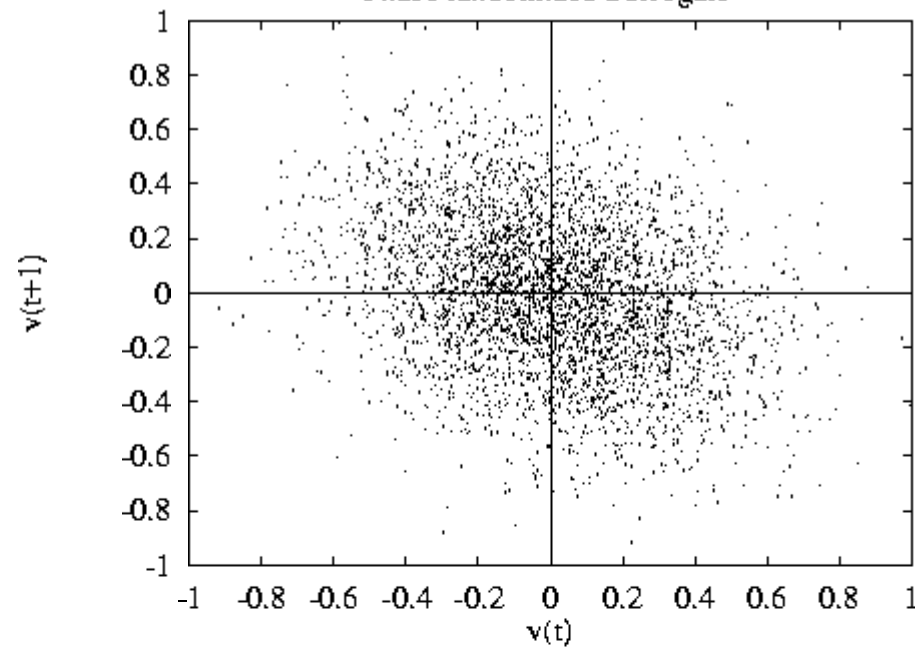




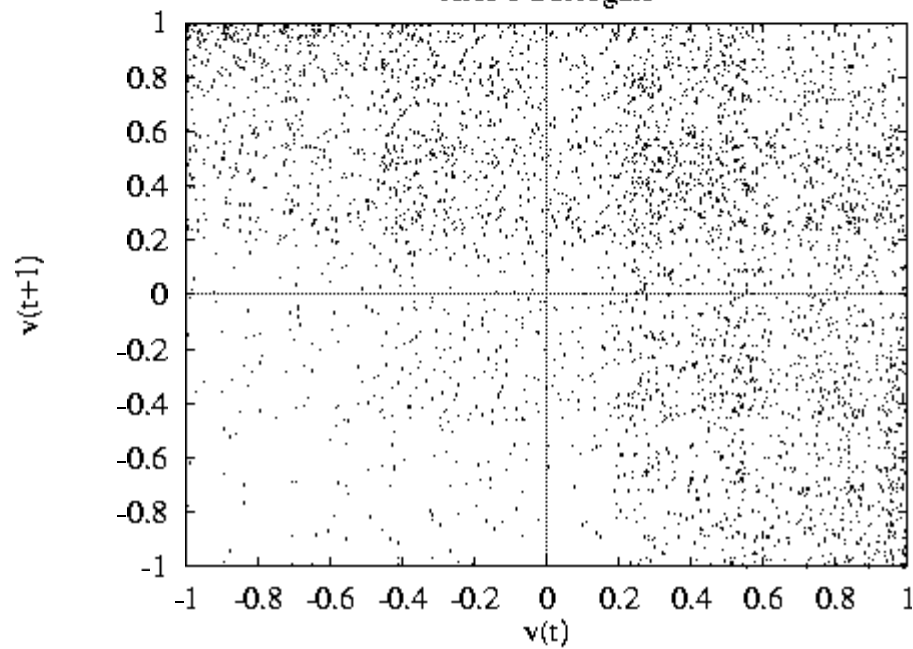
Phase space plot of Henon map



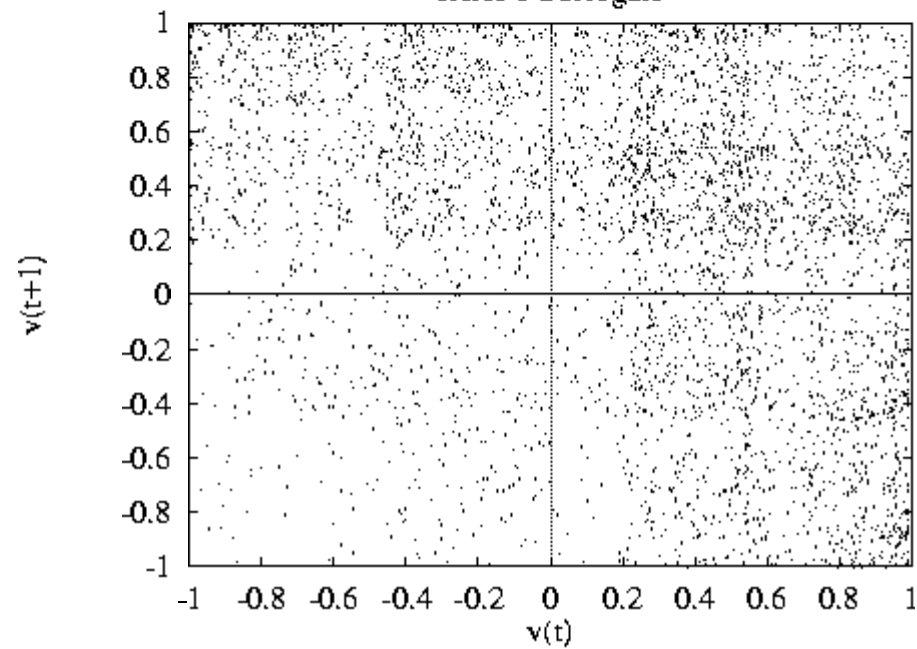
Phase randomized Surrogate



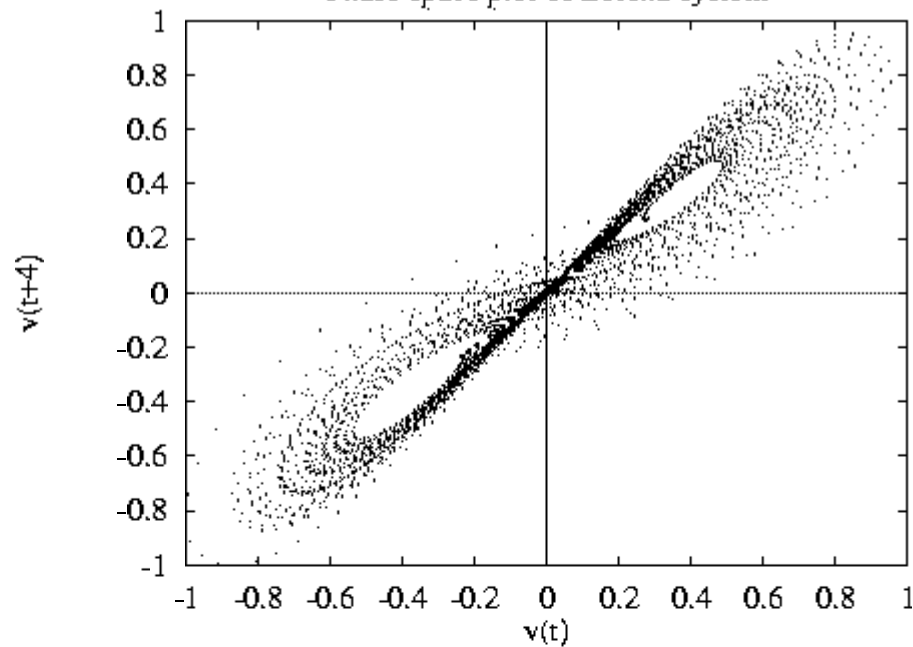
AAFT Surrogate



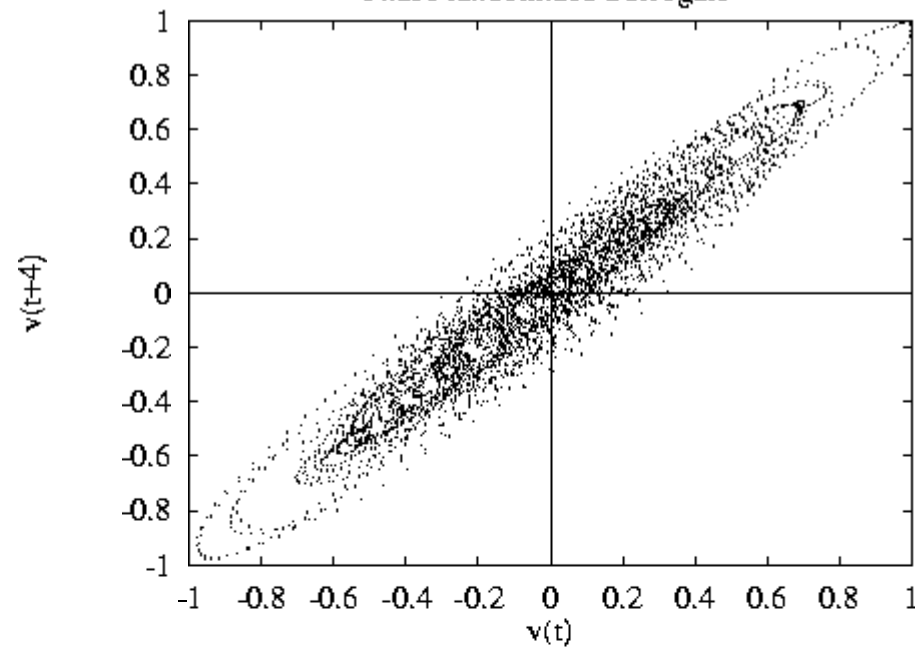
IAAFT Surrogate



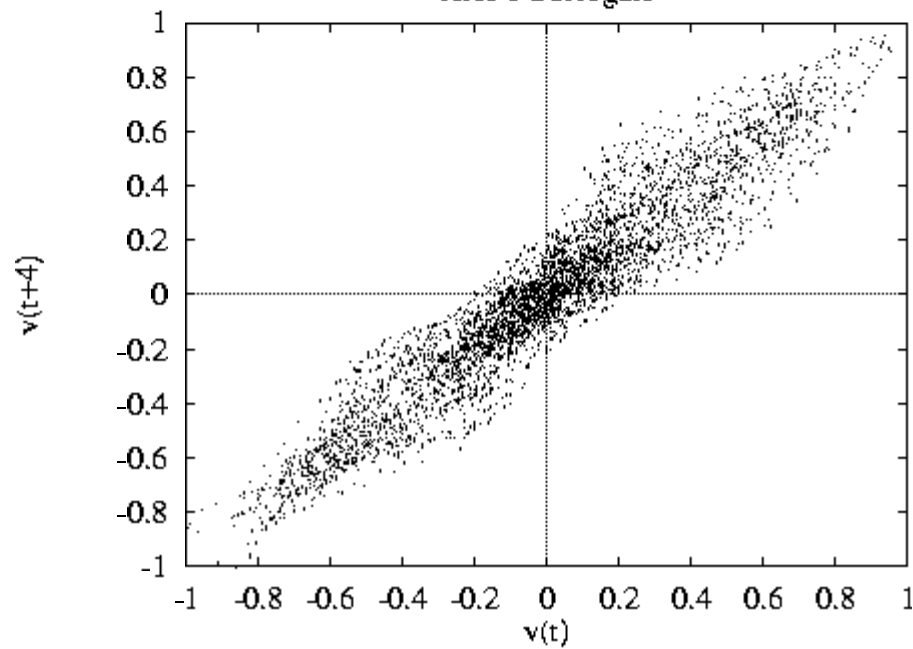
Phase space plot of Lorenz system



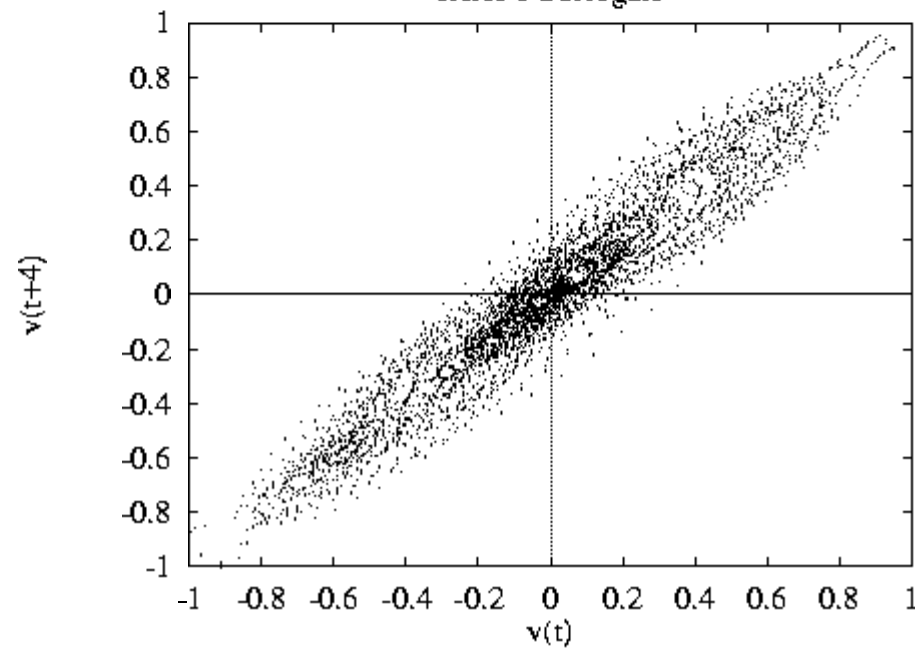
Phase randomized Surrogate

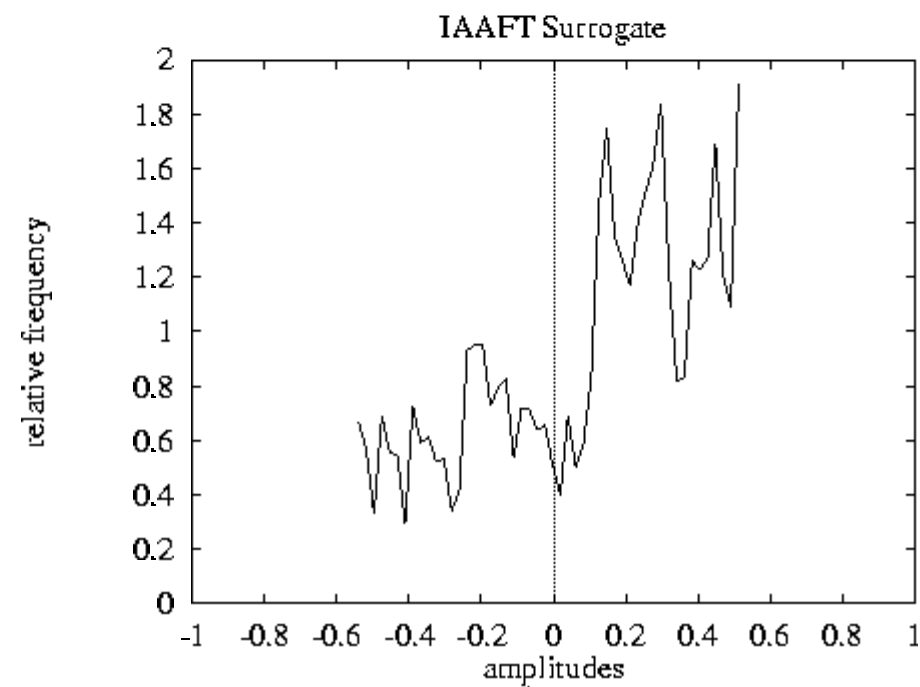
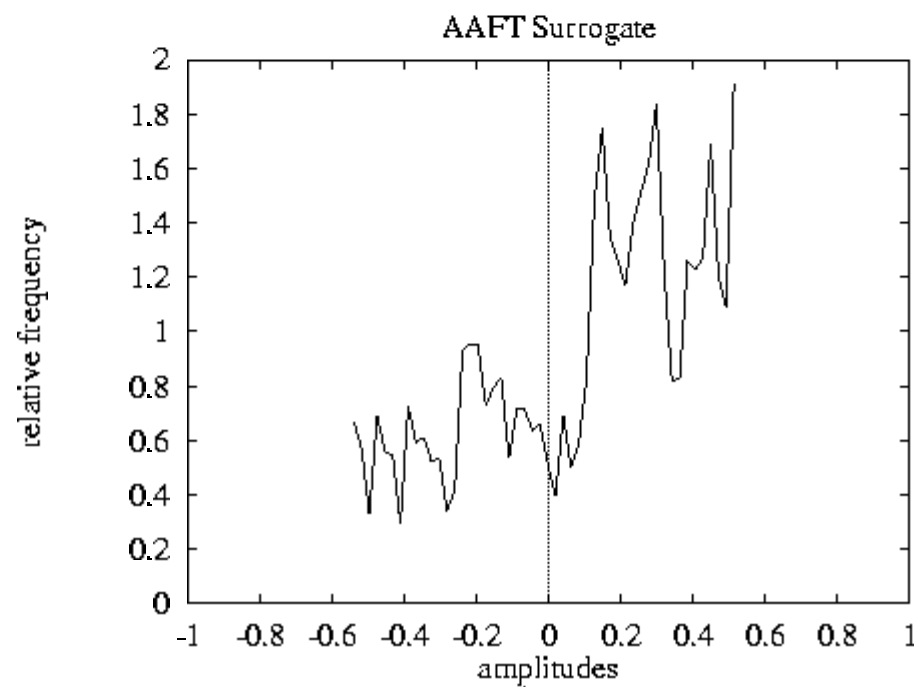
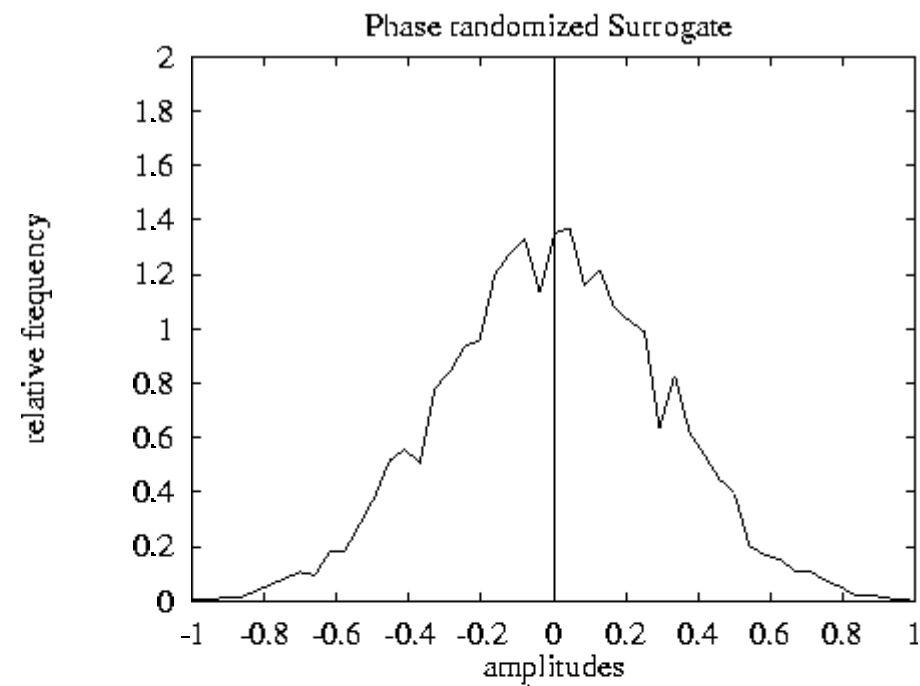
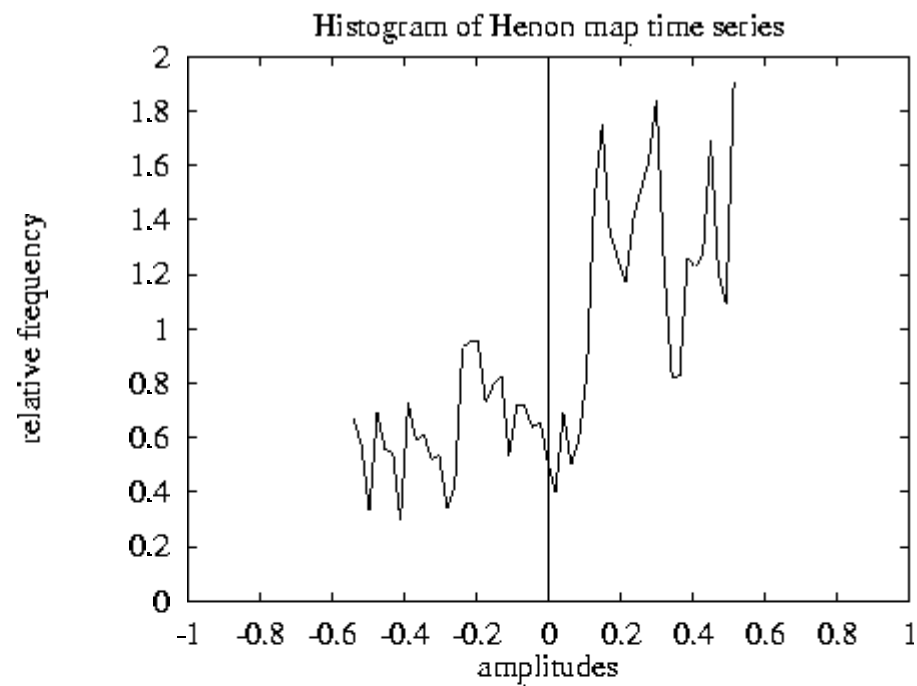


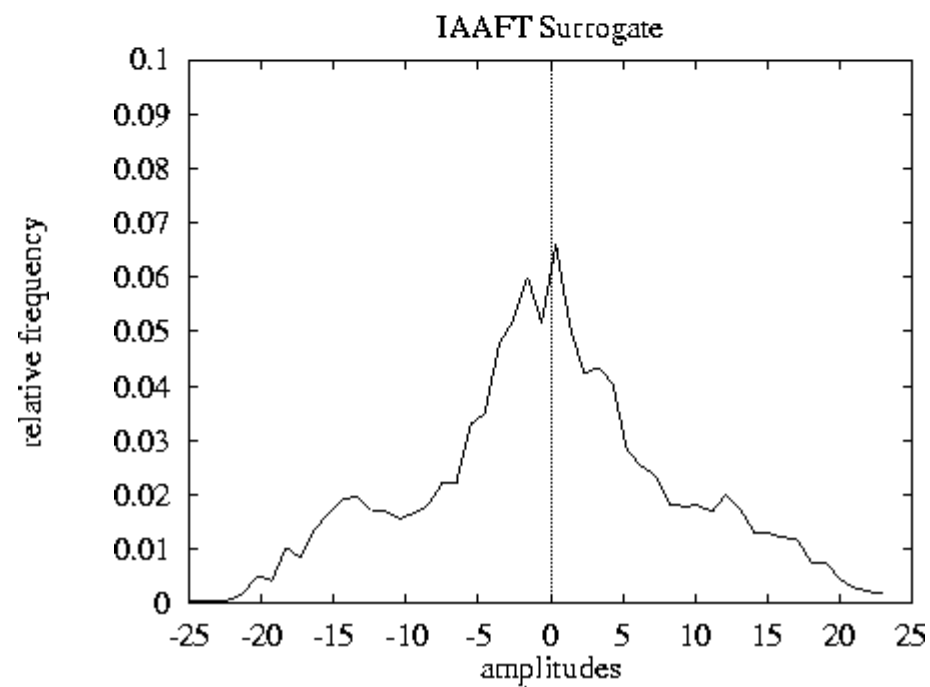
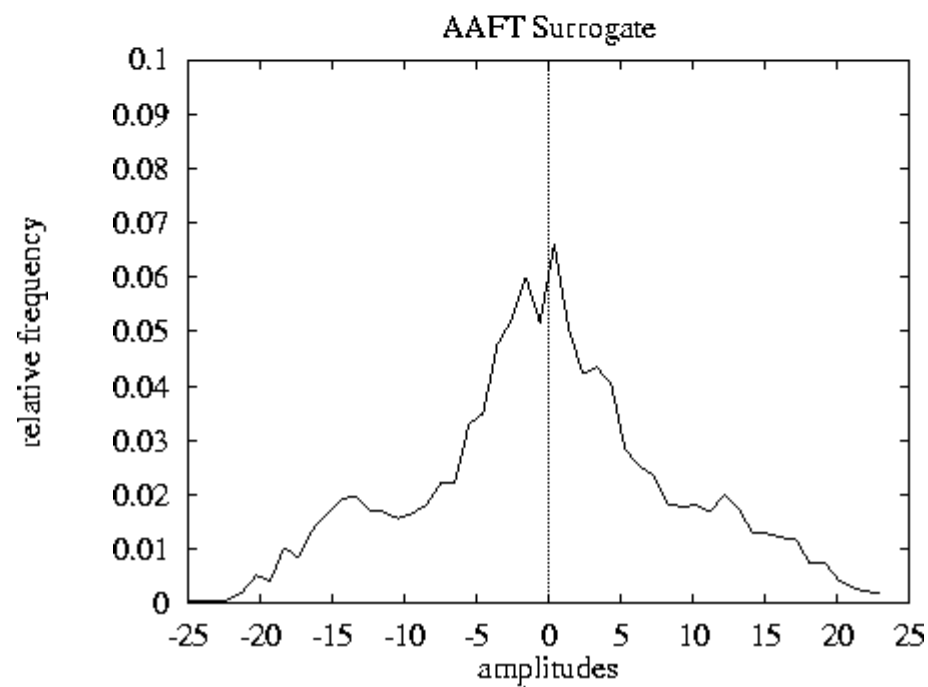
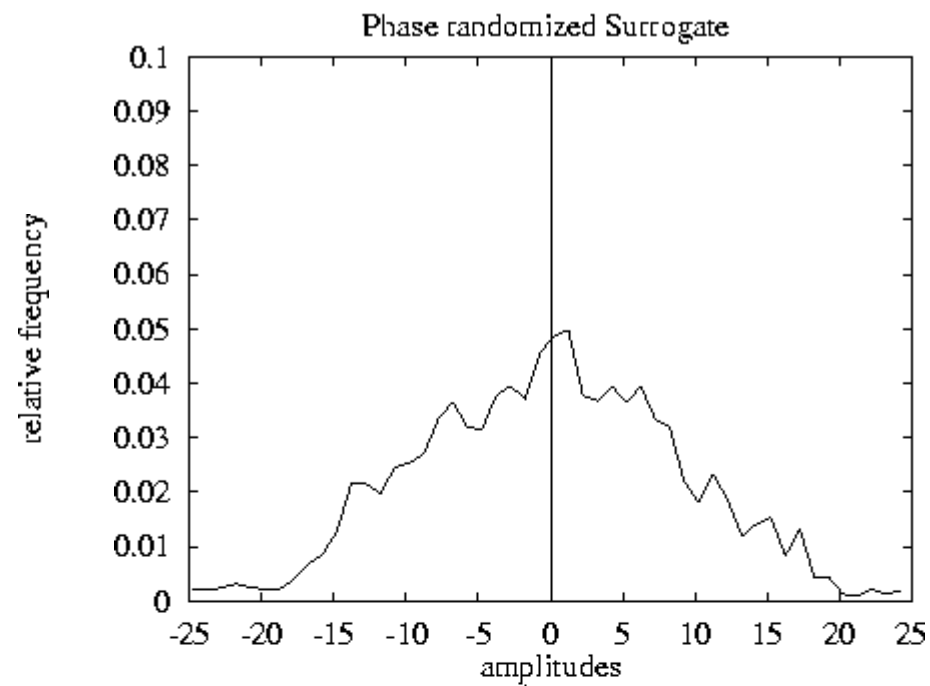
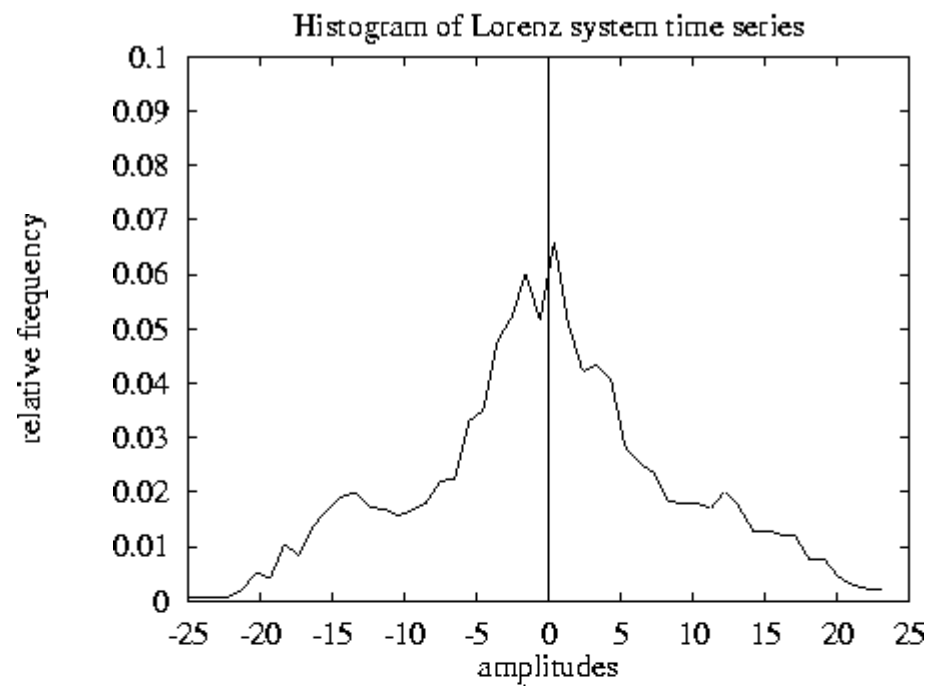
AAFT Surrogate



IAAFT Surrogate







Test auf Nichtlinearität

Problem bei der Erstellung von Surrogaten:

- "end-point mismatch" oder "edge-effect"
 - wird bei spektralen Schätzungen durch Multiplikation mit Fensterfunktion und zero-padding vermieden
 - kann nicht angewendet werden, da Invertierbarkeit der Fouriertransformation dann nicht mehr gewährleistet
- mögliche Lösung:
 - Zeitreihe shiften, bis end-point mismatch minimal oder 0

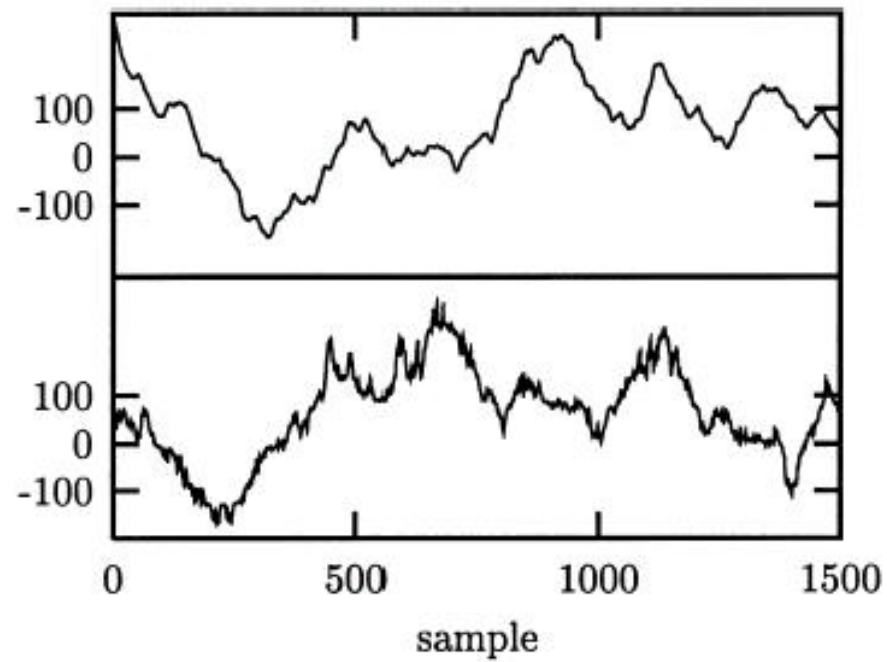


Fig. 6. Effect of end point mismatch on Fourier based surrogates. Upper trace: 1500 iterates of $s_n = 1.9s_{n-1} - 0.9001s_{n-2} + \eta_n$. Lower trace: a surrogate sequence with the same Fourier amplitudes. Observe the additional “crinkliness” of the surrogate.

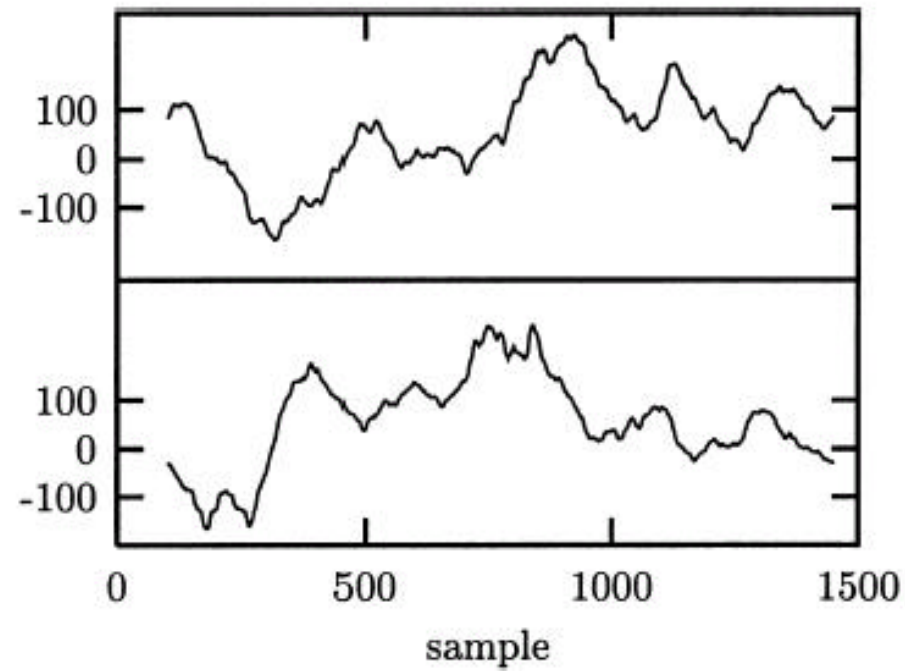


Fig. 7. Repair of end point mismatch by selecting a sub-sequence of length 1350 of the signal shown in Fig. 6 that has an almost perfect match of end points. The surrogate shows no spurious high frequency structure.

Test auf Nichtlinearität

Maße für end-point mismatch und mismatch der ersten Ableitung
(Schreiber und Schmitz, 1999)

$$\gamma_{jump} = \frac{(v_1 - v_N)^2}{\sum_{n=1}^N (v_n - \langle v \rangle)^2}$$
$$\gamma_{slip} = \frac{[(v_2 - v_1) - (v_N - v_{N-1})]^2}{\sum_{n=1}^N (v_n - \langle v \rangle)^2}$$

Test auf Nichtlinearität

